Mundtlig eksamen

Sætning

En ellipse med storakse $2a$ *og lilleakse* $2b$*, brændpunkter i* $(\pm c, 0)$ *og centrum i origo, kan beskrives ved ligningen*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Bevis

Det er velkendt, at summen af afstanden r_i fra hvert brændpunkt til et vilkårligt punkt på ellipsen er konstant og lig med længden af storaksen; det vil sige, at $r_1 + r_2 = 2a$. Antag nu, at de to brændpunkter har koordinaterne $(-c, 0)$ og $(c, 0)$, så er

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \tag{1}$$

Ved at subtrahere $\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ og derefter kvadrere (1) fås, at

$$\begin{aligned} (x+c)^2 + y^2 &= \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 \\ &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Isolering af kvadratroden i (2) giver videre

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= -\frac{1}{4a}\Big(\big((x+c)^2 + y^2\big) - 4a^2 - \big((x-c)^2 + y^2\big)\Big) \\ &= -\frac{1}{4a}\big(x^2 + 2cx + c^2 + y^2 - 4a^2 - x^2 + 2cx - c^2 - y^2\big) \\ &= -\frac{1}{4a}(4cx - 4a^2) \\ &= a - \frac{c}{a}x. \end{aligned} \tag{3}$$

Nu kvadreres (3), for at slippe af med den sidste kvadratrod:

$$\begin{aligned} x^2 - 2cx + c^2 + y^2 &= \left(a - \frac{c}{a}x\right)^2 \\ &= a^2 - 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2. \end{aligned} \tag{4}$$

Denne ligning omskrives nemt til

$$\begin{aligned} x^2 + c^2 + y^2 &= a^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2, \\ x^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) + y^2 &= a^2 - c^2, \\ x^2\frac{a^2 - c^2}{a^2} + y^2 &= a^2 - c^2. \end{aligned} \tag{5}$$

Ved at dividere (5) med $a^2 - c^2$, fås

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1, \tag{6}$$

men af Pythagoras' sætning får man nemt, at $b^2 = a^2 - c^2$, hvilket beviser sætningen. $\square$

Bemærkning
I det generelle tilfælde, hvor ellipsen har centrum i punktet (x_0, y_0), ses det direkte af (6), at den kan beskrives ved ligningen

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \tag{7}$$