Aflevering i uge 40

Vi skal have bestemt løsningen[1] $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ til følgende inhomogene differentialligning af 2. orden under startbetingelserne $u(1) = u'(1) = 0$:

$$u''(t) + \frac{2t^2-1}{t(t+1)}u'(t) - \frac{2(2t+1)}{t(t+1)} = t + 1. \tag{$*$}$$

Det oplyses, at $u_1(t) = t^2$ er en løsning til den homogene analog til $(*)$.

Bemærkning. Da der skal integreres en del gange i det følgende, udelades integrationskonstanter, eftersom disse er uden betydning i denne opgave.

Af startbetingelserne ser vi, at $I = \mathbb{R}_+ \ni 1$, så lad $t_0 = 1$. Først skal vi have fundet en anden løsning til den homogene analog til $(*)$ ved brug af ligning (4.11) i [ES], så først finder vi, at

$$\begin{aligned}
\int \frac{2k^2-1}{k(k+1)}\,dk &= \int \frac{2k(k+1)-(k+1)-k}{k(k+1)}\,dk \\
&= \int 2\,dk - \int \frac{1}{k}\,dk - \int \frac{1}{k+1}\,dk \\
&= 2k - \log(k) - \log(k+1) \\
&= 2k - \log(k(k+1)). \qquad (1)
\end{aligned}$$

Af (1) har vi så, at

$$\begin{aligned}
-\int_1^s \frac{2k^2-1}{k(k+1)}\,dk &= -\big[2k - \log(k(k+1))\big]_1^s \\
&= -\big(2s - \log(s(s+1))\big) + \big(2\cdot 1 - \log(1(1+1))\big) \\
&= 2 - \log(2) + \log(s(s+1)) - 2s. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Ved brug af det vi er kommet frem til i (2) og bemærkningen lige under ligning (4.11) i [ES], fås følgende:

$$\frac{\exp(2-\log(2)+\log(s(s+1))-2s)}{(u_1(s))^2} = \frac{e^2 2^{-1} s(s+1)e^{-2s}}{s^4} = \frac{e^2}{2}\frac{s+1}{s^3e^{2s}} = \frac{W(u_1,u_2)(s)}{s^4}. \tag{3}$$

Som det næste finder vi så, at

$$\int \frac{s+1}{s^3e^{2s}}ds = \int s^{-2}e^{-2s}ds + \int s^{-3}e^{-2s}ds. \tag{4}$$

[1] Bemærk entydigheden, der følger af Sætning 2.2 i [ES].

Ved brug af partiel integration har vi, at

$$\begin{aligned}\int s^{-3}e^{-2s}ds &= -\tfrac{1}{2}s^{-2}\cdot e^{-2s} - \int -\tfrac{1}{2}s^{-2}\left(-2e^{-2s}\right)ds\\ &= -\tfrac{1}{2}s^{-2}e^{-2s} - \int s^{-2}e^{-2s}ds. \qquad (5)\end{aligned}$$

Kombination af (4) og (5) giver os så, at

$$\int \frac{s+1}{s^3e^{2s}}ds = -\frac{1}{2}s^{-2}e^{-2s}. \qquad (6)$$

Af (3), (6) og ligning (4.11) i [ES] finder vi, at en anden løsning til den homogene analog til $(*)$ er givet ved

$$\begin{aligned}\widetilde{u}_2(t) &= u_1(t)\int_1^t \frac{e^2}{2}\frac{s+1}{s^3e^{2s}}dt\\ &= t^2\cdot\frac{e^2}{2}\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left[s^{-2}e^{-2s}\right]_1^t\\ &= -\frac{e^2}{4}t^2\left(t^{-2}e^{-2t} - 1^{-2}e^{-2\cdot 1}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(t^2 - e^2e^{-2t}\right). \qquad (7)\end{aligned}$$

Eftersom $t\mapsto t^2$ jo er en løsning til den homogene analog til $(*)$, kan vi smide det første led i $\widetilde{u}_2(t)$ væk, således at vi vælger $u_2(t) = -\frac{e^2}{4}e^{-2t}$. Vi finder så med $r(t) = t+1$, at

$$\frac{u_2(s)r(s)}{W(u_1,u_2)(s)} = \frac{-\frac{e^2}{4}e^{-2s}(s+1)}{\frac{e^2}{2}s(s+1)e^{-2s}} = -\frac{1}{2}s^{-1}, \qquad (8)$$

$$\frac{u_1(s)r(s)}{W(u_1,u_2)(s)} = \frac{s^2(s+1)}{\frac{e^2}{2}s(s+1)e^{-2s}} = 2se^{2s-2}. \qquad (9)$$

Af (8) fås så følgende:

$$-\int_1^t \frac{u_2(s)r(s)}{W(u_1,u_2)(s)}ds\cdot u_1(t) = -\int_1^t\left(-\frac{1}{2}s^{-1}\right)ds\cdot t^2 = \frac{1}{2}t^2\int_1^t s^{-1}ds = \frac{1}{2}t^2\log(t). \qquad (10)$$

Fra afleveringsopgaven på ugeseddel 1 ved vi, at $\int se^{as}ds = a^{-2}(as-1)e^{as}$. Med $a=2$ giver dette, at

$$\int_1^t 2se^{2s-2}ds = \frac{2}{e^2}[2^{-2}(2s-1)e^{2s}]_1^t = \frac{1}{2e^2}\left(2te^{2t} - e^{2t} - e^2\right) = \frac{1}{e^2}te^{2t} - \frac{1}{2e^2}e^{2t} - \frac{1}{2}. \qquad (11)$$

Af (11) og vores valg af $u_2(t)$, har vi nu følgende:

$$\int_1^t \frac{u_1(s)r(s)}{W(u_1,u_2)(s)}ds \cdot u_2(t) = \left(\frac{1}{e^2}te^{2t} - \frac{1}{2e^2}e^{2t} - \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{e^2}{4}e^{-2t}\right) = -\frac{1}{4}t + \frac{1}{8} + \frac{e^2}{8}e^{-2t}. \quad (12)$$

Eftersom $u_0 = v_0 = 0$, ses det direkte af ligning (4.10) i [ES], at $d_1 = d_2 = 0$, så ifølge ligning (4.9) i [ES] skal vi nu blot addere (10) og (12), hvilket giver følgende løsning til $(*)$:

$$u(t) = \frac{1}{2}t^2\log(t) - \frac{1}{4}t + \frac{1}{8} + \frac{e^2}{8}e^{-2t}.$$

Litteratur

[ES] Erik Skibsted. *Lineære 2. ordens ligninger.*