Aflevering i uge 8

Opgave 330

Lad $1 < s \in \mathbb{R}$, og lad funktionen $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^s}.$$

Spørgsmål (a)

Jeg vil først bestemme monotoniintervallerne for f, så eftersom f er differentiabel på hele $\mathbb{R}_+$ (da både $\ln(x)$ og x^s er differentiable på $\mathbb{R}_+$), skal jeg ifølge Sætning 7.10 i [ETP][1] starte med at finde nulpunkter for den afledede af f. Ved brug af Sætning 7.6 (d) fås, at

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{x^{-1}x^s - \ln(x)sx^{s-1}}{(x^s)^2} = \frac{x^{s-1}}{x^{2s}}\big(1 - s\ln(x)\big) = x^{-(s+1)}\big(1 - s\ln(x)\big),$$

$$\frac{df}{dx}(x) = 0 \Longrightarrow x^{-(s+1)} = 0 \vee 1 - s\ln(x) = 0 \Longrightarrow 1 - s\ln(x) = 0 \Longrightarrow x = e^{s^{-1}}.$$

Sætning 7.6 (a) og (b) giver mig videre, at

$$\begin{aligned}\frac{d^2 f}{dx^2}(x) &= \frac{d}{dx}x^{-(s+1)} - \frac{d}{dx}x^{-(s+1)}s\ln(x)\\ &= -(s+1)x^{-(s+2)} - s\big(-(s+1)x^{-(s+2)}\ln(x) + x^{-(s+1)}x^{-1}\big)\\ &= -(s+1)x^{-(s+2)} + sx^{-(s+2)}\big((s+1)\ln(x) - 1\big)\\ &= x^{-(s+2)}\big(s(s+1)\ln(x) - 2s + 1\big),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2 f}{dx^2}\big(e^{s^{-1}}\big) &= \big(e^{s^{-1}}\big)^{-(s+2)}\Big(s(s+1)\ln\big(e^{s^{-1}}\big) - 2s + 1\Big)\\ &= e^{-1-2s^{-1}}\Big(s(s+1)s^{-1} - 2s - 1\Big)\\ &= -se^{-(1+2s^{-1})} < 0.\end{aligned}$$

Da den dobbeltafledede af f er negativ i ekstremumspunktet, må f være konkav i en lille åben omegn af dette punkt. Heraf følger det trivielt (se eventuelt Korollar 7.19), at f har maksimum for $x = e^{s^{-1}}$. Altså kan jeg konkludere, at

(i) f er voksende på intervallet $\big(0, e^{s^{-1}}\big]$,

(ii) f er aftagende på intervallet $\big[e^{s^{-1}}, \infty\big)$.

[1] Forkortelse for „Funktioner af en og flere variable“, 2. udgave, af E. T. Poulsen. Det er underforstået, at de andre referencer i opgaven også er til denne bog.

Spørgsmål (b)

Ved brug af partiel integration, vil jeg evaluere det ubestemte integral

$$\int f(x)dx = \int x^{-s}\ln(x)dx.$$

Først observerer man, at intergranden er integrabel, så ovenstående udtryk giver mening. Idet eventuelle integrationskonstanter udelades, vil et smart valg nu være

$$g(x) = x^{-s}, \qquad G(x) = \frac{x^{1-s}}{1-s},$$

$$h(x) = \ln(x), \qquad h'(x) = x^{-1}.$$

Eftersom både g' og h' nemt ses at være kontinuerte på $\mathbb{R}_+$, har jeg nu, at for $C \in \mathbb{R}$, ifølge Sætning 8.23 i [ETP], er

$$\begin{aligned}
\int f(x)dx &= \frac{x^{1-s}}{1-s}\ln(x) - \int \frac{x^{1-s}}{1-s}x^{-1}dx \\
&= \frac{1}{1-s}x^{1-s}\ln(x) - \frac{1}{1-s}\int x^{-s}dx \\
&= \frac{1}{1-s}\left(x^{1-s}\ln(x) - \frac{x^{1-s}}{1-s}\right) + C \\
&= \frac{x^{1-s}}{(s-1)^2}\big(\ln(x) - s\ln(x) - 1\big) + C \\
&= \frac{x^{1-s}\big((1-s)\ln(x) - 1\big)}{(s-1)^2} + C.
\end{aligned}$$

Spørgsmål (c)

Nu vil jeg vise, at det uegentlige integral

$$\int_a^\infty f(x)dx \tag{1}$$

er konvergent for ethvert positivt reelt a, og samtidig bestemme dets værdi.

Lad $a \in \mathbb{R}_+$ være givet, så giver Spørgsmål (b) og Sætning 6.35 (b) mig, at

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \frac{1}{(s-1)^2}\Big[x^{1-s}\big((1-s)\ln(x) - 1\big)\Big]_a^b \\
&= \frac{1}{(s-1)^2}\Big(b^{1-s}\big((1-s)\ln(b) - 1\big) - a^{1-s}\big((1-s)\ln(a) - 1\big)\Big).
\end{aligned}$$

Nu giver (1) mig, at jeg skal undersøge om grænseværdien

$$\lim_{b\to\infty} b^{1-s}\big((1-s)\ln(b) - 1\big)$$

eksisterer, og i givet fald bestemme dens værdi.

Fra første del af beviset for Sætning 7.24 har jeg, at

$$\lim_{b\to\infty} \frac{\ln(b)}{b^{s-1}} = 0.$$

Idet $1-s<0$ er en reel konstant, følger det af Sætning 6.35 (b), at grænseværdien

$$\lim_{b\to\infty} \frac{(1-s)\ln(b)}{b^{s-1}}$$

eksisterer og er lig

$$(1-s)\lim_{b\to\infty} \frac{\ln(b)}{b^{s-1}} = (1-s)0 = 0.$$

Sætning 6.39 (b) giver mig videre, at grænseværdien

$$\lim_{b\to\infty} \frac{1}{b^{s-1}}$$

eksisterer og er lig 0. Endelig følger det nu af Sætning 6.35 (c), at

$$\lim_{b\to\infty} b^{1-s}\big((1-s)\ln(b)-1\big) = \lim_{b\to\infty} \frac{(1-s)\ln(b)-1}{b^{s-1}} = \lim_{b\to\infty} \frac{(1-s)\ln(b)}{b^{s-1}} - \lim_{b\to\infty} \frac{1}{b^{s-1}} = 0.$$

Af Sætning 6.35 (b) og (c) og Definition 8.24 fås så, idet $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ eksisterer, at

$$\begin{aligned}
\int_a^\infty f(x)dx &:= \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{(s-1)^2}\Big(b^{1-s}\big((1-s)\ln(b)-1\big) - a^{1-s}\big((1-s)\ln(a)-1\big)\Big) \\
&= \frac{1}{(s-1)^2}\Big(\lim_{b\to\infty} b^{1-s}\big((1-s)\ln(b)-1\big) - a^{1-s}\big((1-s)\ln(a)-1\big)\Big) \\
&= \frac{1}{(s-1)^2}\Big(0 - a^{1-s}\big((1-s)\ln(a)-1\big)\Big) \\
&= \frac{a^{1-s}\big((s-1)\ln(a)+1\big)}{(s-1)^2}.
\end{aligned}$$

Altså er konvergensen bevist, og værdien af (1) er bestemt. □

Spørgsmål (d)

Jeg vil som det sidste vise, at den uendelige række

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^s} \tag{2}$$

er konvergent.

Først laves omskrivningen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^s} = \frac{\ln(2)}{2^s} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^s},$$

hvor $\lim_{s\to\infty} \ln(2)/2^s = 0$. Altså er $\ln(2)/2^s \in (0, \ln(2)/2) \subseteq \mathbb{R}$ en konstant for ethvert reelt tal $s > 1$, som ikke har nogen indflydelse på en eventuel konvergens af (2). Sætning 8.29 giver mig nu (ved at erstatte 1 med 3), at (2) er konvergent, hvis og kun hvis det uegentlige integral

$$\int_3^{\infty} f(x)dx$$

er konvergent, forudsat at integranden er positiv og aftagende på intervallet $[0, \infty)$. Dette følger imidlertid nemt ved kombination af Spørgsmål (a) og beviset for Sætning 7.24, og altså er (2) konvergent. $\square$