Aflevering i uge 15

Opgave 2.5.9

Lad $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ være givet ved $f(x) = \sqrt{x}$.

Jeg vil først bestemme Taylorpolynomiet af 2. grad for f i punktet $x = 100$. Eftersom f oplagt er glat på $\mathbb{R}_+$ (det er en „elementær“ funktion), eksisterer $f^{(n)} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ for ethvert $n \in \mathbb{N}$, og er givet ved[1]

$$\frac{d^n f}{dx^n}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \prod_{k=1}^{n-1} (2k-1) x^{\frac{1-2n}{2}}. \tag{1}$$

Definition 2.1.2 i [STT][2] og (1) giver mig nu, at Taylorpolynomiet af 2. grad for f i $x = 100$ er givet ved

$$\begin{aligned} T_2 f(x) &= \sum_{m=0}^{2} \frac{f^{(m)}(100)}{m!}(x-100)^m \\ &= \sum_{m=0}^{2} \frac{1}{m!} \frac{(-1)^{m+1}}{2^m} \prod_{k=1}^{m-1} (2k-1) 100^{\frac{1-2m}{2}} (x-100)^m \\ &= \sum_{m=0}^{2} (-1)^{m+1} \frac{10^{1-2m}}{m! 2^m} \prod_{k=1}^{m-1} (2k-1)(x-100)^m. \end{aligned}$$

Nu følger der så en hoben beregninger, hvor ovenstående udtryk forenkles, men disse vil jeg skåne dig for, og blot konstatere, at man ender med

$$T_2 f(x) = -\frac{1}{8000}x^2 + \frac{3}{40}x + \frac{15}{4}, \tag{2}$$

$$T_2 f(99) = -\frac{1}{8000} \cdot 99^2 + \frac{3}{40} \cdot 99 + \frac{15}{4} = \frac{79599}{8000},$$

som altså er en tilnærmet værdi for $\sqrt{99}$.

Eftersom f er glat, eksisterer $f^{(n+1)}(x) = f^{(3)}(x)$ og den er kontinuert på $\mathbb{R}_+$. Specielt er den så kontinuert for $x \in [99, 100] \subseteq D_{f^{(n)}}$. Af (1) fås, at $f^{(3)}(x) = 3/8x^{-5/2}$, som klart ses at antage sit maksimum for $x = 99$, på intervallet $x \in [99, 100]$.

Videre har jeg, at

$$M = f^{(3)}(99) = \frac{3}{8 \cdot 99^{\frac{5}{2}}} = \cdots = \frac{\sqrt{11}}{862488}.$$

[1] Et bevis herfor, kan ses i lemmaet på side 3.

[2] Forkortelse for „Indledning til Matematisk Analyse II“, af H. Stetkær, K. Thomsen og C. Tønnesen-Friedman.

Korollar 2.2.2 i [STT] giver mig nu, med $a = 100$ og $b = 99$, at eftersom M er maksimumsværdi for $f^{(3)}(x)$ på intervallet $x \in [99, 100]$, er unøjagtigheden på $\sqrt{99}$, ved brug af Taylorpolynomiet, af størrelsesordenen

$$|R_2 f(99)| \leq \frac{M}{(2+1)!}|99 - 100|^{2+1} = \frac{\sqrt{11}/862488}{6} \cdot 1^3 = \frac{\sqrt{11}}{5174928} = [\text{næsten nul}].$$

Konklusionen er altså, at (2) er en ganske god approksimation til $x \mapsto \sqrt{x}$.

Lemma. *Lad* $f : \mathbb{R}' \to \mathbb{R}'$*, hvor* $\mathbb{R}' = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$*, være givet ved* $f(x) = \sqrt{x}$*, og lad* $n \in \mathbb{N}$*, så er* f *oplagt glat på* $\mathbb{R}_+$ *(det er en „elementær“ funktion). Altså eksisterer* $f^{(n)} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *for ethvert* $n \in \mathbb{N}$*, og der gælder følgende:*

$$\frac{d^n f}{dx^n}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \prod_{k=1}^{n-1} (2k-1) x^{\frac{1-2n}{2}}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+.$$

Bevis. Lad $n \in \mathbb{N}$ være vilkårligt og fastholdt. Ved brug af induktion og Sætning 1.10 i [ETP][3], vil jeg nu vise, at udsagnet U_n, der er givet ved

$$\frac{d^n f}{dx^n}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \prod_{k=1}^{n-1} (2k-1) x^{\frac{1-2n}{2}},$$

er sandt for ethvert $n \in \mathbb{N}$. Induktionsstarten er ganske triviel, idet

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \cdot 1 x^{-\frac{1}{2}} = \frac{(-1)^{1+1}}{2^1} \prod_{k=1}^{1-1} (2k-1) x^{\frac{1-2\cdot 1}{2}}.$$

Nu til induktionsskridtet: Antag, at U_p er sand. Jeg viser så, at $U_p \Rightarrow U_{p+1}$:

$$\begin{aligned}
\frac{d^{p+1} f}{dx^{p+1}}(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d^p f}{dx^p}(x)\right) \\
&\overset{(*)}{=} \frac{d}{dx}\left(\frac{(-1)^{p+1}}{2^p} \prod_{k=1}^{p-1} (2k-1) x^{\frac{1-2p}{2}}\right) \\
&= \frac{(-1)^{p+1}}{2^p} \prod_{k=1}^{p-1} (2k-1) \frac{d}{dx} x^{-\frac{2p-1}{2}} \\
&= \frac{(-1)^{p+1}}{2^p} \prod_{k=1}^{p-1} (2k-1) \left(-\frac{2p-1}{2}\right) x^{-\frac{2p-1}{2}-1} \\
&= -\frac{(-1)^{p+2}}{2^p} \left(-\frac{1}{2}\right) (2p-1) \prod_{k=1}^{p-1} (2k-1) x^{-\frac{2p+1}{2}} \\
&= \frac{(-1)^{p+2}}{2^{p+1}} \prod_{k=1}^{p} (2k-1) x^{\frac{1-2p-2}{2}} \\
&= \frac{(-1)^{(p+1)+1}}{2^{p+1}} \prod_{k=1}^{(p+1)-1} (2k-1) x^{\frac{1-2(p+1)}{2}},
\end{aligned}$$

hvor jeg har brugt induktionsantagelsen i $(*)$. Hermed er $U_p \Rightarrow U_{p+1}$ nu bevist sand, og Sætning 1.10 i [ETP] giver mig så, at U_n er sand for alle $n \in \mathbb{N}$. □

[3] Forkortelse for „Funktioner af en og flere variable“, 2. udgave, af E. T. Poulsen.