Aflevering i uge 17

Spørgsmål (a)

Definer først $a_n \coloneqq 2n+1$, og bemærk så, at for $\forall\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : a_n \neq 0$. Ifølge Kapitel 4 i [ETP][1], har jeg nu at $\lim_{n\to\infty} \frac{|2n+1|}{|2(n+1)+1|}$ eksisterer, og

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|2n+1|}{|2(n+1)+1|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+3} = 1.$$

Dette giver mig, at $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ eksisterer, og der gælder, at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|2n+1|}{|2(n+1)+1|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+3} = 1.$$

Sætning 3.2.5 i [STT][2] giver mig så, at konvergensradius for rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ er lig 1.

På konvergenscirklens rand gælder der, at $|z| = 1$, og videre har jeg, at

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \ \wedge\ z = -1 \ :\ z^n = 1 \ \vee\ z^n = -1.$$

Dette giver mig, at for $|z| = 1$, er

$$\lim_{n\to\infty} a_n z^n = \begin{cases} -\infty & \text{for } n \text{ ulige og } z = -1, \\ \infty & \text{ellers.} \end{cases}$$

Sætning 4.34 i [ETP] giver mig, at eftersom $\lim_{n\to\infty} a_n z^n \neq 0$, divergerer rækken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ på hele randen af konvergenscirklen.

Spørgsmål (b)

Definer nu

$$f(z) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) z^n, \tag{1}$$

for $z \in \mathbb{C}$ med $|z| < 1$. Jeg vil nu finde en potensrækkefremstilling for

$$g(z) \coloneqq f(z) - z f(z) = (1-z) f(z), \tag{2}$$

for $|z| < 1$.

[1] Forkortelse for „Funktioner af en og flere variable“, 2. udgave, af E. T. Poulsen.

[2] Forkortelse for „Indledning til Matematisk Analyse II“, af H. Stetkær, K. Thomsen og C. Tønnesen-Friedman.

Det er bare at komme i gang med at regne løs, og af definitionerne på f og g fås nemt, at

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)z^n - \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)z^{n+1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)z^n - \sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)z^n.$$

Bemærk, at begge rækker har samme indicering, så eftersom de begge er konvergente (oplagt!), giver Sætning 4.33 (b) i [ETP] mig, at

$$g(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\big((2n+1)z^n - (2n-1)z^n\big) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2z^n = 1 + 2z\sum_{n=0}^{\infty} z^n. \tag{3}$$

Hermed er (2) skrevet som en potensrækkefremstilling.

Sætning 4.32 (b) i [ETP] giver mig videre, at idet $|z| < 1$, er $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ konvergent og $1 - z \neq 0$, så følgende udtryk er meningsfyldt:

$$g(z) = 1 + 2z\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + 2z\frac{1}{1-z} = \frac{1-z}{1-z} + \frac{2z}{1-z} = \frac{1+z}{1-z}. \tag{4}$$

Kombination af (2) og (4) giver mig nu, at

$$\frac{1+z}{1-z} = (1-z)f(z) \Longrightarrow f(z) = \frac{1+z}{(1-z)^2}, \tag{5}$$

for ethvert $z \in \mathbb{C}$ med $|z| < 1$.

Spørgsmål (c)

Der er nu ikke megen *matematik* tilbage i opgaven, eftersom (5) direkte giver mig, at

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1+1/2}{(1-1/2)^2} = 6,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2^n}i^n = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\left(\frac{i}{2}\right)^n = \frac{1+i/2}{(1-i/2)^2} = \cdots = \frac{4}{25} + i\frac{22}{25}. \tag{6}$$

Nu kan man så enten „gå i panik“ og begynde at regne løs for at bestemme summen

$$\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{4p+1}{4^p} = \sum_{p=0}^{\infty}\left(i^2\right)^p\frac{(2\cdot 2)p+1}{(2^2)^p} = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{2\cdot 2p+1}{2^{2p}}i^{2p},$$

eller man kan være lidt praktisk og observere, at den netop svarer til (6) med $n = 2p$, lige bortset fra, at der nu blot summes over de lige led, hvorved der ikke bidrages til imaginærdelen. Konklusionen er, at ovenstående sum netop er lig realdelen af (6), så

$$\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{4p+1}{4^p} = \frac{4}{25}.$$