Aflevering i uge 46

Opgave 9.6

Spørgsmål (a)

Der er givet følgende 3×3-matrix:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Det oplyses så, at $\lambda = 5$ er en egenværdi for $\underline{\underline{A}}$. For at bestemme samtlige egenvektorer til denne egenværdi, skal jeg løse ligningssystemet

$$\begin{aligned} (5-5)x_1 + \quad 0x_2 + \quad 0x_3 &= 0 \\ 0x_1 + (3-5)x_2 + \quad 2x_3 &= 0, \\ 0x_1 + \quad 1x_2 + (4-5)x_3 &= 0 \end{aligned}$$

som er ækvivalent med

$$\begin{aligned} -2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_2 - \ x_3 &= 0 \end{aligned}.$$

Heraf ses det tydeligt, at E_5 er givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ t \end{pmatrix},$$

hvor $s, t \in \mathbb{R}$.

Spørgsmål (b)

Jeg vil nu bestemme endnu en egenværdi for $\underline{\underline{A}}$, så jeg finder det tilsvarende karakteristiske polynomium:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} &= (5-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 0 & 3-\lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (5-\lambda)\big((3-\lambda)(4-\lambda) - 1 \cdot 2\big) \\ &= (5-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 10) \\ &= (5-\lambda)^2(2-\lambda). \end{aligned}$$

Altså er $\lambda = 2$ en anden egenværdi for $\underline{\underline{A}}$.