Aflevering i uge 48

Det oplyses, at tallet ϕ opfylder $\phi^2 = \phi + 1$, som, ved at forkorte med ϕ og derefter trække 1 fra, ses at være ækvivalent med

$$\phi^{-1} = \phi - 1.$$

Videre gælder der, at vektoren $(1, \phi) \in \mathbb{R}^2$ er en egenvektor for Fibonaccimatricen $\underline{\underline{F}}$, med egenværdien ϕ. Dette følger af, at

$$\underline{\underline{F}}\begin{pmatrix} 1 \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ 1+\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ \phi^2 \end{pmatrix} = \phi\begin{pmatrix} 1 \\ \phi \end{pmatrix}.$$

Yderligere har jeg, at $(-\phi, 1) \in \mathbb{R}^2$ er en egenvektor til $\underline{\underline{F}}$, med tilhørende egenværdi $-\phi^{-1}$, eftersom

$$\underline{\underline{F}}\begin{pmatrix} -\phi \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\phi \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\phi^{-1} \end{pmatrix} = -\phi^{-1}\begin{pmatrix} -\phi \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Matricen $\underline{\underline{B}}$ fås af de to ovenstående egenvektorer, og da $\det\big(\underline{\underline{B}}\big) > 0$, er $\underline{\underline{B}}$ invertibel. I og med at den består af egenvektorer for $\underline{\underline{F}}$, vil den diagonalisere $\underline{\underline{F}}$. Altså er $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{B}}^{-1}\underline{\underline{\Lambda}}\,\underline{\underline{B}}$, hvorom det oplyses, at

$$\underline{\underline{\Lambda}} = \begin{pmatrix} \phi & 0 \\ 0 & -\phi^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -\phi \\ \phi & 1 \end{pmatrix}.$$

Jeg vil nu vise, at

$$\underline{\underline{B}}^{-1} = \frac{1}{1+\phi^2}\begin{pmatrix} 1 & \phi \\ -\phi & 1 \end{pmatrix}.$$

Der gælder følgende:

$$\underline{\underline{B}}^{-1}\underline{\underline{B}} = \frac{1}{1+\phi^2}\begin{pmatrix} 1 & \phi \\ -\phi & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\phi \\ \phi & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+\phi^2}\begin{pmatrix} 1+\phi^2 & -\phi+\phi \\ -\phi+\phi & \phi^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{I}}.$$

Af Sætning 10 i [LA][1], følger det så, at $\underline{\underline{B}}^{-1}$ rent faktisk har den afgivne værdi.

Ifølge ligning (37) i [LA], fås videre, at

$$\begin{aligned} \underline{\underline{F}}^q &= \underline{\underline{B}}^{-1}\underline{\underline{\Lambda}}^q\,\underline{\underline{B}} \\ &= \frac{1}{1+\phi^2}\begin{pmatrix} 1 & -\phi \\ \phi & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi^q & 0 \\ 0 & (-1)^q\phi^{-q} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \phi \\ -\phi & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1+\phi^2}\begin{pmatrix} \phi^q & -(-1)^q\phi^{-q}\phi \\ \phi^{q+1} & (-1)^q\phi^{-q} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \phi \\ -\phi & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

[1] Forkortelse for „Lineær Algebra og Differentialligninger“, af A. Kock og H. A. Nielsen.

Ved at regne videre på $\underline{\underline{F}}^q$, får man

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{F}}^q &= \frac{1}{1+\phi^2}\begin{pmatrix} \phi^q + (-1)^q\phi^{-q}\phi^2 & \phi^{q+1} - (-1)^q\phi^{-q}\phi \\ \phi^{q+1} - (-1)^q\phi^{-q}\phi & \phi^{q+2} + (-1)^q\phi^{-q} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{1+\phi^2}\begin{pmatrix} \phi^q + (-1)^q\phi^{2-q} & \phi^{q+1} + (-1)^{q+1}\phi^{2-(q+1)} \\ \phi^{q+1} + (-1)^{q+1}\phi^{2-(q+1)} & \phi^{q+2} + (-1)^{q+2}\phi^{2-(q+2)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} f_q & f_{q+1} \\ f_{q+1} & f_{q+2} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

hvor

$$f_q = \frac{\phi^q + (-1)^q\phi^{2-q}}{1+\phi^2}.$$