Aflevering i uge 18

For at lette notationen, lader jeg i det følgende $a_n := (n+1)^2/n!$ og $b_n := (n+1)/n!$, for ethvert $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Spørgsmål (a)

Betragt potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \tag{1}$$

Bemærk, at $\forall\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : a_n \neq 0$, og

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{\left|\dfrac{(n+1)^2}{n!}\right|}{\left|\dfrac{(n+2)^2}{(n+1)!}\right|} = \frac{(n+1)^2}{(n+2)^2}\frac{(n+1)!}{n!} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+4n+4}(n+1) = \frac{1+2n^{-1}+n^{-2}}{1+4n^{-1}+4n^{-2}}(n+1).$$

Ved kombination af Sætning 4.19, Sætning 4.20 og Lemma 4.22 i [ETP][1] har jeg, at grænseværdien for $n \to \infty$ af ovenstående udtryk eksisterer, og så får jeg af Sætning 6.35 (d) i [ETP], at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2n^{-1}+n^{-2}}{1+4n^{-1}+4n^{-2}}(n+1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1+2n^{-1}+n^{-2}}{1+4n^{-1}+4n^{-2}} \cdot \lim_{n\to\infty}(n+1) = 1 \cdot \infty = \infty.$$

Altså eksisterer også $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, og Sætning 3.2.5 i [STT][2] giver mig nu, med $N = 0$, at konvergensradiusen for (1) er lig

$$R_f = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+2n^{-1}+n^{-2}}{1+4n^{-1}+4n^{-2}}(n+1) = \infty.$$

Spørgsmål (b)

Da $R_f = \infty$, fastlægger (1) en funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, der er givet ved

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{2}$$

Af (2) og Sætning 3.2.15 i [STT], har jeg direkte (med $a = 0$), at for ethvert $t \in \mathbb{R}$, da er

$$\int f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!}\frac{t^{n+1}}{n+1} = t\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!}t^n.$$

[1] Forkortelse for „Funktioner af en og flere variable“, 2. udgave, af E. T. Poulsen.
[2] Forkortelse for „Indledning til Matematisk Analyse II“, af H. Stetkær, K. Thomsen og C. Tønnesen-Friedman.

Sætning 8.18 i [ETP] giver mig videre, at for ethvert $x \in \mathbb{R}$, gælder der følgende:

$$\int_0^x f(t)\,dt = x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n - 0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}0^n = x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n.$$

Spørgsmål (c)

Betragt nu potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n. \tag{3}$$

Ved nogle beregninger, der er *helt* analoge til dem i Spørgsmål (a), kan det nemt vises, at konvergensradiusen for (3) er $R_g = \infty$. Dette giver mig, at (3) fastlægger en funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Ved samme fremgangsmåde som i Spørgsmål (b), finder jeg nu følgende:

$$\int g(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}\frac{t^{n+1}}{n+1} = t\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!} = te^t, \quad \forall\, t \in \mathbb{R},$$

$$\int_0^x g(t)\,dt = xe^x - 0e^0 = xe^x, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Spørgsmål (d)

Først giver Spørgsmål (b) og Sætning 4.33 i (b) i [ETP] mig – ved at substituere t med x i ligningen nederst på side 1 –, at

$$\int f(x)\,dx = x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n = x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}x^n + x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n, \tag{5}$$

hvor sidste led ses at være lig med xe^x. Første led kan skrives som

$$x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}x^n = x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}x^n = x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} = x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n = x^2e^x. \tag{6}$$

Kombination af (5) og (6) giver mig nu, at

$$\int f(x)\,dx = xe^x + x^2e^x = x(x+1)e^x. \tag{7}$$

Ved brug af Sætning 8.21 (b) og Sætning 8.23 i [ETP], finder jeg så, at for $C \in \mathbb{R}$, er[3]

$$\begin{aligned}\int \big(x^2e^x + 3xe^x + e^x\big)\,dx &= \int x^2e^x\,dx + \int 3xe^x\,dx + \int e^x\,dx \\ &= \big(x^2 - 2x + 2\big)e^x + 3(x-1)e^x + e^x + C \\ &= \big(x^2 - 2x + 2 + 3x - 3 + 1\big)e^x + C \\ &= x(x+1)e^x + C. \end{aligned} \tag{8}$$

Ved at indsætte $x = 0$ i (2) og (8), fås følgende:

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n 0^n = 0(0+1)e^0 + C \implies C = 0.$$

Indsætter man denne værdi af C i (8), får man af (7) og (8), at

$$f(x) = x^2e^x + 3xe^x + e^x,$$

idet stamfunktioner er entydigt bestemte op til en konstant.

[3] Da der „bare“ er tale om triviel integration, udelader jeg mellemregningerne.