Aflevering i uge 45

Opgave 13

Lad $(E, \mathcal{F}, P)$ betegne et sandsynlighedsrum, hvor udfaldsrummet E er mængden af hændelser; $\mathcal{F}$ er en σ-algebra på E, der består af alle delmængder af E; og $P : \mathcal{F} \to [1, 0]$ er et sandsynlighedsmål på $\mathcal{F}$. Lad $A, B \in \mathcal{F}$ være to hændelser.

Spørgsmål (i)

Vi skal have vist følgende implikation:

$$P(A) = P(B) = 0 \quad \Longrightarrow \quad P(A \cup B) = 0. \tag{1}$$

Antag derfor, at $P(A) = P(B) = 0$. Af ligning (3.5) i [ITP] fås, at

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0 + 0 - P(A \cap B) = -P(A \cap B). \tag{2}$$

Da P er en afbildning ind i intervallet $[0, 1]$, og vi i (2) har en lighed mellem to udtryk i P, der har modsat fortegn, kan denne ligning kun være opfyldt, såfremt

$$P(A \cup B) = P(A \cap B) = 0.$$

Hvilket fuldfører beviset for implikationen.

Spørgsmål (ii)

Som det næste, skal vi have vist, at

$$P(A) = P(B) = 1 \quad \Longrightarrow \quad P(A \cap B) = 1. \tag{3}$$

Antag derfor, at $P(A) = P(B) = 1$. Omrokering af ligning (3.5) giver, at

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B) = 1 + 1 = 2. \tag{4}$$

Igen bruger vi egenskaben ved P til at konkludere, at de eneste mulige løsninger til (4) er

$$P(A \cup B) = P(A \cap B) = 1,$$

og vi er dermed færdig.

Litteratur

[ITP] Preben Blæsild og Jan Pedersen. *An Introduction to Probability Theory*, 3. udgave. Aarhus Universitet, Danmark 2004.

