Aflevering i uge 47

Opgave 90

I denne opgave, vil jeg bevise følgende

lemma. *Lad* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *og* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *være reelle talfølger, således at*

$$a_n \leq x_n \leq b_n \tag{1}$$

for alle $n \in \mathbb{N}$. *Hvis* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *og* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *begge er konvergente følger med grænseværdien* c, *så er også* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konvergent med grænseværdien* c.

Bevis. Jeg vil vise, at talfølgen $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerer mod c, altså at

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N' \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N' \Longrightarrow |x_n - c| < \varepsilon. \tag{2}$$

Lad nu derfor $n \geq N'$. Idet både $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ og $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerer mod c, har jeg, at

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{N} : n \geq M \Longrightarrow |a_n - c| < \frac{\varepsilon}{3}, \\ \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Longrightarrow |b_n - c| < \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned} \tag{3}$$

Af (1) fås videre, at

$$a_n \leq x_n \Longrightarrow x_n - a_n \geq 0 \Longrightarrow |x_n - a_n| = x_n - a_n \leq b_n - a_n. \tag{4}$$

Ved brug af (1), (4) og Sætning 3.23 i [ETP][1], fås nu følgende:

$$\begin{aligned} |x_n - c| &= |(x_n - a_n) + (a_n - c)| \leq |x_n - a_n| + |a_n - c| \leq |b_n - a_n| + |a_n - c| \\ &= \big|(b_n - c) + \big(-(a_n - c)\big)\big| + |a_n - c| \leq |b_n - c| + |a_n - c| + |a_n - c|. \end{aligned} \tag{5}$$

Hvis altså nu $n \geq \max\{M, N\}$, følger det af (3) og (5), at

$$|x_n - c| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

og lemmaet (der også kaldes *klemmelemmaet*) er hermed bevist. □

[1] Forkortelse for „Funktioner af en og flere variable", af E. T. Poulsen.