Aflevering i uge 49

Opgave 7

Det oplyses, at en funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er givet ved $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$. Jeg vil nu finde kritiske punkter for f, så jeg bestemmer først de enkelt-, dobbelt- og blandede afledede af f, der klart eksisterer på hele $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 2x + 2xy, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) = 2 + 2y, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)\right) = 2x,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 2y + x^2 \quad \text{og} \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) = 2.$$

De kritiske punkter fås for $\nabla f(x, y) = (0, 0)$, så jeg skal have løst ligningssystemet $(2x + 2xy, 2y + x^2) = (0, 0)$ med hensyn til x og y, hvilket gøres som følger:

$$2y + x^2 = 0 \Longrightarrow y = -\tfrac{1}{2}x^2,$$

$$2x + 2xy = 0 \Longrightarrow 2x + 2x\big(-\tfrac{1}{2}x^2\big)^2 = 0 \Longrightarrow x(2 - x^2) = 0 \Longrightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt{2},$$

$$x = 0 \Longrightarrow y = 0, \qquad x = \sqrt{2} \Longrightarrow y = -1 \qquad \text{og} \qquad x = -\sqrt{2} \Longrightarrow y = -1.$$

De tre kritiske punkter er altså $(x, y) = (0, 0)$ og $(x, y) = \big(\pm\sqrt{2}, -1\big)$. Videre fås, at

$$\begin{aligned} D(a, b) &:= \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(a, b) \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(a, b) - \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(a, b)\right)\right)^2 \\ &= (2 + 2b)2 - (2a)^2 = 4(b - a^2 + 1). \end{aligned}$$

Heraf ses let, at

$$D(0, 0) = 4 > 0,$$

$$D\big(-\sqrt{2}, -1\big) = D\big(\sqrt{2}, -1\big) = -8 < 0.$$

Konklusion: Funktionen f har lokalt minimum for $(x, y) = (0, 0)$, hvor $f(0, 0) = 4$, og saddelpunkter for $(x, y) = \big(-\sqrt{2}, -1\big)$ og $(x, y) = \big(\sqrt{2}, -1\big)$.

Opgave 25

Først fås, at

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}.$$

Altså har jeg $f : [-1, 1]^2 \to \mathbb{R}$, hvor $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2 y + 4$. Fra Opgave 7 ved jeg, at eneste indre kritiske punkt er $(x, y) = (0, 0)$, så jeg undersøger nu randen af D:

$$f(1, y) = 1^2 + y^2 + 1^2 y + 4 = y^2 + y + 5,$$

$$f(x, 1) = x^2 + 1^2 + x^2 1 + 4 = 2x^2 + 5,$$

$$f(-1, y) = (-1)^2 + y^2 + (-1)^2 y + 4 = y^2 + y + 5,$$

$$f(x, -1) = x^2 + (-1)^2 + x^2(-1) + 4 = 5.$$

Der gælder så følgende:

- Grafen for $f(1, y) = f(-1, y)$ er en parabel, hvis toppunkt har førstekoordinaten $-\frac{1}{2}$, så da denne funktion er kontinuert på et lukket og begrænset interval, skal jeg kun undersøge endepunkterne og toppunktet:

$$f(1, -1) = 5, \quad f\left(1, -\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{19}{4} \quad \text{og} \quad f(1, 1) = 7.$$

- Grafen for $f(x, 1)$ er en parabel, hvis toppunkt har førstekoordinaten 0, så af symmetrigrunde har jeg, at

$$f(-1, 1) = f(1, 1) = 7 \quad \text{og} \quad f(0, 1) = 5.$$

- Grafen for $f(x, -1) = 5$ er en vandret linje.

Konklusion: Funktionen f har globalt maximum i $(x, y) = (-1, 1)$ og $(x, y) = (1, 1)$, med $f_{\max} = 7$, og globalt minimum for $(x, y) = (0, 0)$, hvor $f_{\min} = 4$.