Aflevering i uge 16

Opgave 2.5.17

For at lette notationen, lader jeg først $a_n = n^{-2}$ og $b_n = (x^2 + n^2)^{-1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ og for $x \in \mathbb{R}$.

Spørgsmål (a)

Sætning 4.40 i [ETP][1] giver mig, at for $p = 2 > 1$, da er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent. Da der gælder, at $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$, er

$$n^2 \leq x^2 + n^2 \Longrightarrow \frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{x^2 + n^2} \Longrightarrow a_n \geq b_n \geq 0,$$

for ethvert $n \in \mathbb{N}$. Sammenligningskriteriet (Sætning 4.36 i [ETP]) giver mig så, at med $c = 1 > 0$, da $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent, er også $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent på hele $\mathbb{R}$. $\square$

Spørgsmål (b) i)

Weierstrass' M-test (Sætning 2.5.1 i [STT][2]) giver mig, at eftersom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer på $\mathbb{R}$ og $|b_n| = b_n \leq a_n$, vil rækken $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergere uniformt og absolut på $\mathbb{R}$. $\square$

Bemærkning. Indekset løber her fra $n = 1$, i stedet for fra $n = 0$, som i sætningen, men det ændrer naturligvis ikke på, at vi sagtens kan bruge sætningen.

Spørgsmål (b) ii)

Lad nu funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Da b_n oplagt er kontinuert på hele $\mathbb{R}$ for ethvert $n \in \mathbb{N}$, giver Sætning 2.3.8 i [STT] mig, at f er kontinuert på $\mathbb{R}$. $\square$

Spørgsmål (c)

Jeg vil nu vise, at $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$, hvilket som bekendt svarer til at vise følgende to ting:

$$\exists R > 0 : (R, \infty) \subseteq D_f,$$

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : x > \delta \Longrightarrow |f(x)| < \varepsilon.$$

[1] Forkortelse for „Funktioner af en og flere variable", 2. udgave, af E. T. Poulsen.
[2] Forkortelse for „Indledning til Matematisk Analyse II", af H. Stetkær, K. Thomsen og C. Tønnesen-Friedman.

Bevis. Første del er klart opfyldt, så videre giver halelemmaet (Lemma 4.37 i [ETP]) mig, at idet rækken $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er konvergent og $a_n \geq b_n \geq 0$ (således at $|b_n| = b_n$), gælder der for ethvert $n \in \mathbb{N}$, at

$$\begin{aligned}\big|f(x)\big| &= \left|\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|\right| = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \,[= f(x)] \\ &= \sum_{n=1}^{N} b_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n \leq \sum_{n=1}^{N} b_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n.\end{aligned}$$

Nu de berømte ord: Lad $\varepsilon > 0$ være givet! Lad desuden $N \in \mathbb{N}$ være givet vilkårligt, men fastholdt. Vælg nu eksempelvis $\delta = \sqrt{2N/\varepsilon} > 0$. Da $\varepsilon n^2 > 0$, er

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\delta^2 + n^2} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\frac{2N}{\varepsilon} + n^2} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\varepsilon}{2N + \varepsilon n^2} < \sum_{n=1}^{N} \frac{\varepsilon}{2N} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Heraf ses nemt, at

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : x > \delta \Longrightarrow \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{x^2 + n^2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

For $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ ses det, at dennes hale går mod nul for $n \to \infty$, og derfor kan jeg – ifølge Lemma 4.37 i [ETP] – vurdere summen mindre end $\varepsilon/2$, for tilpas store $N \in \mathbb{N}$.

Dette giver mig samlet, at

$$|f(x)| \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{x^2 + n^2} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Da N er valgt vilkårligt, afslutter dette beviset. □