Aflevering i uge 7

Opgave 326

Inden jeg besvarer selve opgaven, vil jeg bevise følgende

Lemma. *Lad $C \in \mathbb{R}$, så er*

$$\int (x-1)^n e^{-x} dx = -e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{d^k}{dx^k}(x-1)^n + C.$$

Bevis. Lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x) = \int (x-1)^n e^{-x} dx + e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{d^k}{dx^k}(x-1)^n,$$

så har jeg, at

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-1)^n e^{-x} + \frac{d}{dx}\left(e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{d^k}{dx^k}(x-1)^n \right) \\ &= (x-1)^n e^{-x} - e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{d^k}{dx^k}(x-1)^n + e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}(x-1)^n \\ &= (x-1)^n e^{-x} - e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{d^k}{dx^k}(x-1)^n + e^{-x} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{d^k}{dx^k}(x-1)^n. \end{aligned}$$

Man bemærker nu, at

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x-1)^n = 0,$$

så bidraget fra $k = n+1$ giver nul, og altså har jeg følgende:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-1)^n e^{-x} - e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{d^k}{dx^k}(x-1)^n + e^{-x} \sum_{k=1}^{n} \frac{d^k}{dx^k}(x-1)^n \\ &= (x-1)^n e^{-x} - e^{-x}(x-1)^n = 0. \end{aligned}$$

Denne betragtning giver mig nu, at

$$\exists\, C \in \mathbb{R} \,:\, f(x) = C = \int (x-1)^n e^{-x} dx + e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{d^k}{dx^k}(x-1)^n,$$

hvoraf beviset følger umiddelbart. □

Ved brug af lemmaet, fås med $n = 3$, at

$$\begin{aligned}
\int (x-1)^3 e^{-x} dx &= -e^{-x} \sum_{k=0}^{3} \frac{d^k}{dx^k}(x-1)^3 + C \\
&= -e^{-x}\big((x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 6(x-1) + 6\big) + C \\
&= -e^{-x}\big(x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 3x^2 - 6x + 3 + 6x - 6 + 6\big) + C \\
&= -e^{-x}\big(x^3 + 3x + 2\big) + C.
\end{aligned}$$