Aflevering i uge 47

Betragt sandsynlighedsrummet $(E, \mathcal{F}, P)$, hvor

$$E = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a, b = 1, 2, \dots, n\}.$$

Lad nu $V_1, \dots, V_5 \in \mathcal{F}$ være diskrete, stokastiske variable, hvor

$$V_1(a,b) = a, \quad V_2(a,b) = b, \quad V_3(a,b) = a + b, \quad V_4(a,b) = a \wedge b \quad \text{og} \quad V_5(a,b) = a \vee b.$$

Det oplyses videre, at

$$\begin{aligned} &\operatorname{supp} p_{V_1} = \operatorname{supp} p_{V_2} = \operatorname{supp} p_{V_4} = \operatorname{supp} p_{V_5} = \{1, 2, \dots, n\}, \\ &\operatorname{supp} p_{V_3} = \{2, 3, \dots, 2n\}. \end{aligned}$$

Jævnfør notationen i afsnit 5.2 i [ITP], vælger vi $A = \mathbb{R}$. Da $A \supseteq V_i$ for $i = 1, \dots, 5$, er

$$\begin{aligned} &A \cap \operatorname{supp} p_{V_1} = A \cap \operatorname{supp} p_{V_2} = A \cap \operatorname{supp} p_{V_4} = A \cap \operatorname{supp} p_{V_5} = \{1, 2, \dots, n\}, \\ &A \cap \operatorname{supp} p_{V_3} = \{2, 3, \dots, 2n\}. \end{aligned}$$

Vi skal nu have bestemt $p_{V_i}(x)$, hvor $i = 1, \dots, 5$.

DEL 1–2

Det er helt oplagt, at $\#\{V_1 = x\} = \#\{V_2 = x\}$, og

$$\#\{V_1 = x\} = \#\{(1,b), (2,b), \dots, (n,b)\} = n.$$

Eftersom vi arbejder i et uniformt sandsynlighedsfelt, og der er $n \cdot n = n^2$ mulige udfald, følger det af ligning (2.5) i [ITP], at

$$P(V_1 = x) = P(V_2 = x) = \frac{n}{n^2} = n^{-1}, \quad x \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

DEL 3

Vi ser, at for $1 \leq x < n$, er

$$\#\{V_3 = x + 1\} = \#\{(1,x), (2, x-1), \dots, (x-1, 2), (x, 1)\} = x.$$

Vi har videre, at den toledede sums aritmetiske gennemsnit er givet ved

$$X_n = \frac{1}{n} \cdot 2 \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) = n + 1.$$

Da summen klart er symmetrisk omkring det aritmetiske gennemsnit, følger det umiddelbart ved kombination af ovenstående ligninger, at antallet af muligheder for hændelsen $V_3 = x$ netop er

$$n - |X_n - x| = n - |n + 1 - x| = n - |x - (n + 1)|.$$

Igen bruger vi ligning (2.5) i [ITP], og konkluderer, at

$$P(V_3 = x) = \frac{n - |x - (n + 1)|}{n^2}, \quad x \in \{2, 3, \dots, 2n\}.$$

DEL 4

Lad $1 \leq x \leq n$, så er

$$\begin{aligned} \#\{V_4 = x\} &= \#\{(n, x), \dots, (x + 1, x), (x, x), (x, x + 1), \dots, (x, n)\} \\ &= 2\big[n - ((x + 1) - 1)\big] + 1 \\ &= 2n + 1 - 2x. \end{aligned}$$

Altså er

$$P(V_4 = x) = \frac{2n + 1 - 2x}{n^2}, \quad x \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

DEL 5

Af symmetriargumenterne i DEL 3, følger det direkte, at $V_5 = X_n - V_4 = n + 1 - V_4$, så

$$P(V_5 = x) = P(V_4 = n + 1 - x) = \frac{2n + 1 - 2(n + 1 - x)}{n^2} = \frac{2x - 1}{n^2}, \quad x \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Bemærkning. Ved at vælge $n = 6$ i det ovenstående, fås det ønskede.

Litteratur

[ITP] Preben Blæsild og Jan Pedersen. *An Introduction to Probability Theory*, 3. udgave. Aarhus Universitet, Danmark 2004.