Aflevering i uge 14

Opgave 4.4.24

Lad den lineære afbildning $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være givet ved

$$T(x,y,z) = (x-2y, 3x+z, 4x+3y).$$

Lad nu $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ og $\mathbf{e}_3$ udgøre basis i $\mathbb{R}^3$, så har jeg, at

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &:= 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 = (2, 3, -1),\\
\mathbf{b} &:= 4\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_3 = (4, 0, -2),\\
\mathbf{c} &:= \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 = (1, -1, 2).
\end{aligned}$$

Kald så det parallelepipedum, der udspændes af **a**, **b** og **c**, for G. Jeg har nu, at matrixrepræsentationen for G er givet ved

$$\mathsf{B}_G = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Videre har jeg følgende:

$$\begin{aligned}
T(2,3,-1) &= (2-2\cdot 3, 3\cdot 2 - 1, 4\cdot 2 + 3\cdot 3) &&= (-4, 5, 17),\\
T(4,0,-2) &= (4-2\cdot 0, 3\cdot 4 - 2, 4\cdot 4 + 3\cdot 0) &&= (4, 10, 16),\\
T(1,-1,2) &= (1-2(-1), 3\cdot 1 + 2, 4\cdot 1 + 3(-1)) &&= (3, 5, 1).
\end{aligned}$$

Dette giver mig, at matricen for parallellepipedummet er givet ved

$$T(G) = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 3 \\ 5 & 10 & 5 \\ 17 & 16 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinanten af ovenstående matrix er lig

$$\begin{aligned}
\det\big(\mathsf{B}_{T(G)}\big) &= -4(10\cdot 1 - 16\cdot 5) - 4(5\cdot 1 - 17\cdot 5) + 3(5\cdot 16 - 17\cdot 10)\\
&= -4(-70) - 4(-80) + 3(-90)\\
&= 330.
\end{aligned}$$

Sætning 4.8 fortæller mig så, at voluminet af billedet af G under T er lig med

$$V_{T(G)} = \big|\det\big(\mathsf{B}_{T(G)}\big)\big| = 330.$$

Opgave 4.4.25

Lad $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være givet som i Opgave 4.4.24, og lad K betegne kuglen, der er givet ved uligheden

$$x^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 \leq 16.$$

Radius af K er $r_K = \sqrt{16} = 4$, så voluminet er altså

$$V_K = \frac{4\pi}{3} r_K^3 = \frac{256\pi}{3}.$$

Lad, ligesom i forrige opgave, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ og $\mathbf{e}_3$ udgøre basis i $\mathbb{R}^3$. Der gælder så, at

$$\begin{aligned} T(\mathbf{e}_1) &= (1 - 2 \cdot 0, 3 \cdot 1 + 0, 4 \cdot 1 + 3 \cdot 0) = \quad (1,3,4), \\ T(\mathbf{e}_2) &= (0 - 2 \cdot 1, 3 \cdot 0 + 0, 4 \cdot 0 + 3 \cdot 1) = (-2,0,3), \\ T(\mathbf{e}_3) &= (0 - 2 \cdot 0, 3 \cdot 0 + 1, 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0) = \quad (0,1,0). \end{aligned}$$

Standardmatrixrepræsentationen for T er så som følger:

$$\mathsf{A}_T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dette giver mig så videre, at

$$\begin{aligned} \det(\mathsf{A}_T) &= 1(0 \cdot 0 - 3 \cdot 1) - (-2)(3 \cdot 0 - 4 \cdot 1) + 0(3 \cdot 0 - 4 \cdot 1) \\ &= 1(-3) + 2(-4) + 0(-4) \\ &= -11. \end{aligned}$$

Igen bruger jeg Sætning 4.8, og finder følgende:

$$V_{T(K)} = |\det(\mathsf{A}_T)| V_K = 11 \cdot \frac{256\pi}{3} = \frac{2816\pi}{3}.$$