Første obligatoriske opgave

Opgave 1

Lad X være en stokastisk variabel, der er Possionfordelt med parameter $\lambda > 0$. Sandsynlighedsfunktionen for X er så givet ved

$$P(X = x) = \begin{cases} e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^x}{x!} & \text{for } x \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Spørgsmål (1)

Først bemærker man, at $\operatorname{supp} p_X = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Jævnfør ligning (5.3) i [ITP], vælger vi nu $A = [1, \infty) \subseteq \mathbb{R}$, således at $A \cap \operatorname{supp} p_X = \mathbb{N}$. Videre gælder der, at $\mathbb{R} \supseteq \{X < 1\}$ og $\{X \geq 1\} = \mathbb{R} \setminus \{X < 1\}$, så af ligning (3.3) og Sætning 5.6 iii) i [ITP], fås følgende:

$$P(X \geq 1) = P(X \in \mathbb{R}) - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} = 1 - e^{-\lambda}.$$

Spørgsmål (2)

Lad nu $\lambda = 1$, så er

$$P(X = x) = \begin{cases} e^{-1}(x!)^{-1} & \text{for } x \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Vælg $A = (-\infty, 2] \subseteq \mathbb{R}$, så er $A \cap \operatorname{supp} p_X = \{0, 1, 2\}$, og dermed har vi følgende:

$$P(X \leq 2) = \sum_{k=0}^{2} P(X = k) = e^{-1}\sum_{k=0}^{2}(k!)^{-1} = e^{-1}\big(1 + 1 + \tfrac{1}{2}\big) = \tfrac{5}{2}e^{-1}.$$

Opgave 2

Vi betragter den todimensionale, disktrete, stokastiske vektor (X, Y) med sandsynlighedsfunktionen

$$p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} ce^{-\lambda}\dfrac{\lambda^y}{y!} & \text{for } x \in \{-2, -1, 0, 1\} \text{ og } y \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

hvor $c, \lambda > 0$.

Spørgsmål (1)

Af ovenstående gaffelforskrift ser vi, at

$$\operatorname{supp} p_{X,Y} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \{-2,-1,0,1\} \text{ og } y \in \mathbb{N} \cup \{0\}\big\}.$$

En skitse af denne mængde vil bestå af punkter i planen, hvilket vist er ganske klart. Jeg gider dog ikke at lave trælse figurer, så det springer jeg over.

Spørgsmål (2)

Som det næste, skal vi have bestemt sandsynlighedsfunktionerne, p_X og p_Y, for X og Y. Af ligning (5.19) i [ITP] har vi, at da $\operatorname{supp} p_Y = \mathbb{N} \cup \{0\}$, er

$$p_X(x) = \sum_{y=0}^{\infty} ce^{-\lambda}\frac{\lambda^y}{y!} = ce^{-\lambda}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\lambda^y}{y!}.$$

Fra Matematisk analyse ved vi, at denne række er konvergent, og af ligning (B.10) i [ITP] fås at den har værdien e^{λ}, så altså er

$$p_X(x) = ce^{-\lambda}e^{\lambda} = c.$$

For $y \notin \operatorname{supp} p_Y$ er – per definition af støtten – $p_X(x) = 0$. Da $\operatorname{supp} p_X = \{-2,-1,0,1\}$, har vi følgende for Y:

$$p_Y(y) = \sum_{x=-2}^{1} ce^{-\lambda}\frac{\lambda^y}{y!} = ce^{-\lambda}\frac{\lambda^y}{y!}\sum_{x=-2}^{1} 1 = 4ce^{-\lambda}\frac{\lambda^y}{y!},$$

og tilsvarende for X; $p_Y(y) = 0$ for $x \notin \operatorname{supp} p_X$.

Lad $\mathcal{K} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \operatorname{supp} p_X\} = \{-2,1,0,1\}$. Af Sætning 5.6 iii) i [ITP] fås så, at

$$1 = \sum_{x \in \mathcal{K}} c = c\sum_{x=-2}^{1} 1 = 4c \implies c = \frac{1}{4}.$$

Dette betyder, at sandsynlighedsfunktionerne for X og Y er givet ved

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{for } x \in \{-2,1,0,1\} \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

$$p_Y(y) = \begin{cases} e^{-\lambda}\frac{\lambda^y}{y!} & \text{for } y \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Spørgsmål (3)

Lad $\lambda = 1$. Da $\operatorname{supp} p_X \cap \operatorname{supp} p_Y = \{0, 1\}$, er

$$P(X = Y) = p_{X,Y}(0, 0) + p_{X,Y}(1, 1) = \tfrac{1}{4}e^{-1}\frac{1^0}{0!} + \tfrac{1}{4}e^{-1}\frac{1^1}{1!} = \tfrac{1}{4}e^{-1}(1 + 1) = \tfrac{1}{2}e^{-1}.$$

Opgave 3

Lad X være en stokastisk variabel, hvis fordelingsfunktion er givet ved

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ \dfrac{1 - e^{-x}}{1 - e^{-1}} & \text{for } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{for } x \geq 1. \end{cases}$$

Spørgsmål (1)

Vi skal først have vist, at X er absolut kontinuert. Da en stokastisk variabel er absolut kontinuert, såfremt dens fordelingsfunktion er absolut kontinuert, og en differentiabel funktion er absolut kontinuert, er det nok at vise, at F_X er differentiabel. Af Lebesgues differentiationssætning ved vi yderligere, at stykkevis differentiabilitet er tilstrækkeligt for absolut kontinuitet, så faktisk skal vi „kun“ have vist, at F_X er stykkevist differentiabel. Lad os derfor betragte funktionen $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, hvor

$$g(x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 - e^{-1}} = \frac{1}{1 - e^{-1}} - \frac{e^{-x}}{1 - e^{-1}} = \frac{e}{e - 1} - \frac{e}{e - 1}e^{-x}.$$

Fra Matematisk analyse ved vi, at differentialoperatoren er lineær, samt at både $x \mapsto e^{-x}$ og $x \mapsto k$, hvor $k \in \mathbb{R}$ er en konstant, er differentiable funktioner på $\mathbb{R}$. Dette giver mig, at g er differentiabel i det indre af dens defintionsmængde – altså på $(0, 1)$. Hermed har vi redegjort for, at F_X er stykkevis differentiabel. Altså er X absolut kontinuert.

Tæthedsfunktionen finder man ved at differentiere fordelingsfunktionen, så da

$$\frac{dF_X}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e}{e - 1}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{e}{e - 1}e^{-x}\right) = 0 - \frac{e}{e - 1}\left(-e^{-x}\right) = \frac{e^{1-x}}{e - 1} \quad \text{for } x \in (0, 1),$$

og differentialkvotienten af en konstant funktion er 0, er tæthedsfunktionen for X altså

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{1-x}}{e - 1} & \text{for } x \in (0, 1) \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Jeg har senere fundet ud af, eftervisningen af den absolutte kontinuitet af X søreme kan klares noget nemmere ved brug af Sætning 5.32 i [ITP] ...

Spørgsmål (2)

Lad Y være en absolut kontinuert, stokastisk variabel med tætheden

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{2}y^2 & \text{for } y \in (-1,1) \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Vi skal nu have bestemt $P(|Y| \leq 1/2)$. Da Y er absolut kontinuert, stokastisk variabel, fås fra Definition 5.29 i [ITP], at f_Y er integrabel. Kombination af ligningerne (5.31) og (5.32) giver så følgende:

$$P(|Y| \leq 1/2) = P(Y \in [-1/2, 1/2]) = P(Y \in (-1/2, 1/2]) = \int_{-1/2}^{1/2} f_Y(y)\,dy$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} \frac{3}{2}y^2\,dy = \left[\frac{1}{2}y^3\right]_{-1/2}^{1/2} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(-\frac{1}{2}\right)^3\right) = \frac{1}{8}.$$

Opgave 4

Lad X være en ligefordelt, stokastisk variabel, hvor $X \sim R(0,1)$, og lad $Y = -\log(X)$. Af Eksempel 5.35 i [ITP] har vi nu, at fordelingsfunktionen for X er givet ved

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \leq 0 \\ \frac{x-0}{1-0} = x & \text{for } x \in (0,1) \\ 1 & \text{for } x \geq 1. \end{cases}$$

Fra Matematisk analyse ved vi, at for $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, hvor $h(x) = -\log(x)$, er h bijektiv. Dette giver os, at den inverse funktion eksisterer, og det er velkendt at den er givet ved

$$h^{-1}(x) = e^{-x}.$$

Da $\{X \geq \exp(-y)\} = \{X < \exp(-y)\}^C = \mathbb{R} \setminus \{X < \exp(-y)\}$ og $P(X \in \mathbb{R}) = 1$, har vi af ligning (3.4) i [ITP], at for $y > 0$ er

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(-\log(X) \leq y) \\ &= P(\log(X) \geq -y) \\ &= P(X \geq \exp(-y)) \\ &= P(X \in \mathbb{R}) - P(X < \exp(-y)) \\ &= 1 - P(X \leq \exp(-y)) \\ &= 1 - \exp(-y). \end{aligned}$$

Sidste lighed i ovenstående beregninger, følger af forskriften for fordelingsfunktionen for X. Igen bruger vi vores kendskab fra Matematisk analyse til at konkludere, at følgende grænseværdi eksisterer og har den angivne værdi:

$$\lim_{y \to 0^+} (1 - \exp(-y)) = \lim_{y \to 0^+} 1 - \lim_{y \to 0^+} \exp(-y) = 1 - \exp(-0) = 1 - 1 = 0.$$

For $y \leq 0$, er $y \mapsto -\log(y)$ udefineret på de reelle tal, så ved brug af ligning (3.2) i [ITP], ses det, at i dette interval, er fordelingsfunktionen for Y givet ved

$$F_Y(y) = P(Y \in \emptyset) = 0.$$

En sammenfatning af dette giver, at

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{for } y \leq 0 \\ 1 - \exp(-y) & \text{for } y \geq 0. \end{cases}$$

Litteratur

[ITP] Preben Blæsild og Jan Pedersen. *An Introduction to Probability Theory*, 3. udgave. Aarhus Universitet, Danmark 2004.