Aflevering i uge 19

Lad først $a_n \coloneqq ((n+1)(n+2))^{-1}$ og $b_n \coloneqq (n(n+1))^{-1}$ for ethvert $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Spørgsmål (a)

Betragt potensrækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{n+1} = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \tag{1}$$

Bemærk, at for $\forall\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : a_n \neq 0$, og at

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{\left|\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right|}{\left|\dfrac{1}{(n+2)(n+3)}\right|} = \frac{(n+2)(n+3)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1+3n^{-1}}{1+n^{-1}} \equiv k_n.$$

Da $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ er konvergent, giver Sætning 4.20 og 4.22 i [ETP][1] mig nu, at $\lim_{n\to\infty} k_n$ eksisterer. Sætning 4.4 og 4.6 i [ETP] mig nemt, at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+3n^{-1}}{1+n^{-1}} = 1.$$

Dette betyder, at også $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ eksisterer, og så giver Sætning 3.2.5 i [STT][2] mig nu, med $N = 0$, at konvergensradiusen for (1) er lig

$$R_g = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+3n^{-1}}{1+n^{-1}} = 1.$$

Spørgsmål (b) i)

Sætning 4.40 i [ETP] giver mig, at for $p = 2 > 1$, er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ konvergent. Da der videre gælder, at for ethvert $n \in \mathbb{N}$ og $z \in \mathcal{K} \coloneqq \{w \in \mathbb{C} \mid |w| \leq 1\}$, er

$$\frac{n(n+1)}{|z|^{n+1}} \geq n^2 \implies b_n |z|^{n+1} \leq n^{-2}, \tag{2}$$

giver Sammenligningskriteriet (Sætning 4.36 i [ETP]) mig – med $c = 1 > 0$ –, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{n+1}$ er absolut konvergent, og dermed også konvergent (jævnfør Sætning 4.42 i [ETP]), på hele konvergenscirklen, som ifølge Spørgsmål (a) er lig med $\mathcal{K}$.

[1] Forkortelse for „Funktioner af en og flere variable", 2. udgave, af E. T. Poulsen.

[2] Forkortelse for „Indledning til Matematisk Analyse II", af H. Stetkær, K. Thomsen og C. Tønnesen-Friedman.

Spørgsmål (b) ii)

Idet rækken $\sum_{n=0}^{\infty} n^{-2}$ oplagt er konvergent, og

$$\left|b_n z^{n+1}\right| = b_n|z|^{n+1} \leq n^{-2}, \quad \forall\, z \in \mathcal{K},$$

giver Weierstarss' M-test (Sætning 2.5.1 i [STT]) mig, med $M_n = n^{-2}$ (da $\{M_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}_+$), at $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergerer uniformt og absolut på $\mathcal{K}$.

Da $b_n z^n$ helt oplagt er kontinuert for ethvert $n \in \mathbb{N}$ og $z \in \mathcal{K}$, følger det nu ved kombination af det ovenstående og Sætning 2.3.8 i [STT], at funktionen $g : \mathcal{K} \to \mathbb{C}$, hvor

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{n+1} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} b_n z^{n+1}, \tag{3}$$

er kontinuert på $\mathcal{K}$.

Spørgsmål (c)

Lad nu $f : [-1, 1] \to \mathbb{C}$ være givet ved

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+1}. \tag{4}$$

Da $R_f = R_g = 1$, giver Sætning 3.2.12 i [STT] mig nu, at for ethvert $x \in (-1, 1)$, kan (4) differentieres ledvist, og man får følgende:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(n+1)x^{n+1-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \overset{(*)}{=} -\log(1-x), \quad x \in (-1, 1), \tag{5}$$

hvor $(*)$ fås fra Eksempel 3.2.16 i [STT].

Spørgsmål (d)

Først finder jeg af (4), at

$$f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n 0^{n+1} = 0.$$

Dette, sammen med (5), giver mig, at jeg kan finde en ekspilcit formel for f ved at løse begyndelsesværdiproblemet

$$f(0) = 0 \quad \text{og} \quad f'(x) = -\log(1-x). \tag{6}$$

Først giver Sætning 8.23 i [ETP] mig, at idet integrationskonstanten her udelades, er

$$\int \log(x)\, dx = \int 1 \log(x)\, dx = x\log(x) - \int \frac{1}{x} x\, dx = x\log(x) - \int dx = x\log(x) - x.$$

Sammen med Sætning 8.22 i [ETP], giver ovenstående mig, med substitutionen $t = 1 - x$, at for $C \in \mathbb{R}$, er

$$\begin{aligned} f(x) &= \int -\log(1-x)\,dx \\ &= -\int -\log(t)\,dt \\ &= t\log(t) - t + C \\ &= (1-x)\log(1-x) - (1-x) + C \\ &= (1-x)\log(1-x) + x - 1 + C. \end{aligned}$$

Nu giver begyndelsesbetingelsen mig, at

$$(1-0)\log(1-0) + 0 - 1 + C = 0 \implies C = 1.$$

Det vil altså sige, at (6) har løsningen

$$f(x) = (1-x)\log(1-x) + x, \quad x \in (-1,1). \tag{7}$$

Spørgsmål (e)

Fra Spørgsmål (b) ii) ved jeg, at g er kontinuert på $\mathcal{K}$, så altså er

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(-1)^{n+1} = \lim_{x\to -1^+} \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+1} = \lim_{x\to -1^+} \big((1-x)\log(1-x) + x\big).$$

Sætning 4.6 (c) og (d) i [ETP] giver mig videre, at

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(-1)^{n+1} = \lim_{x\to -1^+}(1-x) \cdot \lim_{x\to -1^+} \log(1-x) + \lim_{x\to -1^+} x = 2\log(2) - 1.$$

Spørgsmål (f)

Med tilsvarende argumenter som i Spørgsmål (e), fås følgende:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n 1^{n+1} = \lim_{x\to 1^-} \big((1-x)\log(1-x) + x\big). \tag{8}$$

Med substitutionen $t = 1 - x$, er det oplagt, at idet vi stadig ser på $\mathcal{K}$, er

$$\lim_{x\to 1^-} \big((1-x)\log(1-x) + x\big) = \lim_{t\to 0^+} \big(t\log(t) + 1 - t\big). \tag{9}$$

Betragt dernæst funktionen $h : (0,2) \to \mathbb{R}$, hvor

$$h(t) = t\log(t) = \frac{\log(t)}{t^{-1}}.$$

Definer videre to funktioner $h_1, h_2 : (0,2) \to \mathbb{R}$ ved

$$h_1(t) = \log(t),$$

$$h_2(t) = t^{-1}.$$

Sætning 7.2 (c) og (h) i [ETP] giver mig, at både h_1 og h_2 er differentiable (de er endda kontinuert differentiable) i det indre af deres definitionsmængde, og

$$\frac{dh_1}{dt}(t) = t^{-1},$$

$$\frac{dh_2}{dt}(t) = -t^{-2}.$$

Nu giver l'Hôpitals regel om ∞/∞-udtryk, når $t \to 0^+$ (Sætning 7.23 i [ETP]), mig, at da

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{dh_1}{dt}(t)}{\frac{dh_2}{dt}(t)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t^{-1}}{-t^{-2}} = \lim_{t\to 0^+} -t = -0 = 0$$

eksisterer, så eksisterer også $\lim_{t\to 0^+} h(t)$, og

$$\lim_{t\to 0^+} h(t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{dh_1}{dt}(t)}{\frac{dh_2}{dt}(t)} = 0.$$

Sætning 4.6 (c) i [ETP] giver mig nu følgende:

$$\lim_{t\to 0^+}(h(t) + 1 - t) = \lim_{t\to 0^+} h(t) + \lim_{t\to 0^+} 1 - \lim_{t\to 0^+} t = 0 + 1 - 0 = 1.$$

Ved brug af dette, giver (8) og (9) mig så til sidst, at

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1.$$