Aflevering i uge 8

Opgave 2.3.19

Der er givet to lineær afbildninger, $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ og $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, ved

$$S([x_1, x_2, x_3]) = [x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2],$$

$$T([x_1, x_2]) = [2x_1 + x_2, x_1, x_1 - x_2].$$

Jeg vil finde en formel for den lineære afbildning $(S \circ T)([x_1, x_2])$ samt bestemme standardmatrixrepræsentationen A for samme afbildning. Ved udregning fås først, at

$$\begin{aligned}(S \circ T)([x_1, x_2]) &= S(T([x_1, x_2])) \\ &= S([2x_1 + x_2, x_1, x_1 - x_2]) \\ &= [(2x_1 + x_2) - x_1 + (x_1 - x_2), (2x_1 + x_2) + x_1] \\ &= [2x_1, 3x_1 + x_2].\end{aligned}$$

Lad nu $\mathbf{e}_1$ og $\mathbf{e}_2$ udgøre basis i $\mathbb{R}^2$, så gælder der følgende:

$$(S \circ T)(\mathbf{e}_1) = (S \circ T)([1, 0]) = [2 \cdot 1, 3 \cdot 1 + 0] = [2, 3],$$

$$(S \circ T)(\mathbf{e}_2) = (S \circ T)([0, 1]) = [2 \cdot 0, 3 \cdot 0 + 1] = [0, 1].$$

Heraf ses, at

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Opgave 2.3.20

Lad S og T være som i Opgave 2.3.19. Nu vil jeg bestemme en formel for den lineære afbildning $(T \circ S)([x_1, x_2, x_3])$ samt bestemme standardmatrixrepræsentationen A for samme afbildning. Analogt forrige opgave, giver en triviel udregning, at

$$\begin{aligned}(T \circ S)([x_1, x_2, x_3]) &= T(S([x_1, x_2, x_3])) \\ &= T([x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_2]) \\ &= [2(x_1 - x_2 + x_3) + x_2, x_1 - x_2 + x_3, (x_1 - x_2 + x_3) - (x_1 + x_2)] \\ &= [2x_1 - x_2 + 2x_3, x_1 - x_2 + x_3, -2x_2 + x_3].\end{aligned}$$

Lad så $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ og $\mathbf{e}_3$ udgøre basis i $\mathbb{R}^3$.

Jeg har dermed følgende:

$$(T \circ S)(\mathbf{e}_1) = (T \circ S)([1,0,0]) = [2 \cdot 1 - 0 + 2 \cdot 0, 1 - 0 + 0, -0 + 0] = [2,1,0],$$

$$(T \circ S)(\mathbf{e}_2) = (T \circ S)([0,1,0]) = [2 \cdot 0 - 1 + 2 \cdot 0, 0 - 1 + 0, -2 \cdot 1 + 0] = [-1,-1,-2],$$

$$(T \circ S)(\mathbf{e}_3) = (T \circ S)([0,0,1]) = [2 \cdot 0 - 0 + 2 \cdot 1, 0 - 0 + 1, -0 + 1] = [2,1,1].$$

Dette betyder så, at

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$