Aflevering i uge 38

Opgave 24

En funktion $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ er givet ved

$$\rho(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{1}$$

Jeg starter med at bestemme den førstafledede af ρ, med hensyn til x:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\frac{\partial}{\partial x}\left[x^2+y^2+z^2\right] = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}2x = x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Den andenafledede af ρ, med hensyn til x, er så lig med

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right] \\
&= x\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{dx}{dx} \\
&= x\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}-1}\tfrac{\partial}{\partial x}\left[x^2+y^2+z^2\right] + \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}1 \\
&= -\frac{x}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}2x + \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\
&= -\frac{x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Det ses tydeligt, at de tre led med afledede af anden orden er symmetriske; analogt fås, at

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} = \frac{x^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{4}$$

Af (1)-(4), finder jeg nu følgende:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} = \frac{2x^2+2y^2+2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{2}{\rho}.$$

Hermed er det ønskede bevist.