Aflevering i uge 38

Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være en åben delmængde og $f : I \to \mathbb{R}^n$ en kontinuert funktion. Lad endvidere $\|\cdot\|$ være en given norm på $\mathbb{R}^n$.

Del (a)

For $x \in \mathbb{R}^n$ gælder der, at

$$\exists\, C > 0 : \|x\| \leq C\|x\|_1.$$

Bevis. Lad $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ være givet og lad $\{e_i\}_{i=1}^n$ være en basis for $\mathbb{R}^n$. Ved induktion på (2) og (3) i Definition B.1 i [Bet] fås så, at

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|x_i e_i\| = \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\|.$$

Da basisvektorer ikke har længden 1 under vilkårlig norm, idet $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, vælger vi nu $C = \max_i \|e_i\|$. Af ovenstående følger det nu, at

$$\|x\| \leq \max_i \|e_i\| \sum_{i=1}^n |x_i| = C\|x\|_1.$$

Eftersom $\|e_i\| > 0 \,\forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$, ses det af (1) i Definition B.1 i [Bet], at $C = 0$ ikke er tilstrækkelig; altså skal $C > 0$, hvilket skulle vises. □

Del (b)

Følgende afbildning af kontinuert:

$$t \ni I \to \|f(t)\| \in \mathbb{R}.$$

Bemærkning. Et normeret vektorrum $(V, \|\cdot\|)$ giver anledning til en metrik via definitionen $d(x, y) \equiv \|x - y\|$, for $x, y \in V$. En metrik (eller mere generelt, en topologi) er en nødvendig forudsætning for meningsfyldte kontinuitetsovervejelser i det generelle tilfælde.

Bevis. Jævnfør definitionen på kontinuitet, skal vi have vist, at

$$\forall\, y \in \mathbb{R}^n \;\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \delta > 0 \;\forall\, x \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < \delta \;\Rightarrow\; |\|x\| - \|y\|| < \varepsilon.$$

Lad derfor $x, y \in \mathbb{R}^n$ været givet vilkårligt og lad også $\varepsilon > 0$ være givet. Lad endvidere $d(x, y) = \|x - y\|$ være en metrik, der er induceret af normen.

Det ses nu, at et passende delta er $\delta = \varepsilon$, thi så haves nemlig af trekantsuligheden, at

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| < \delta = \varepsilon.$$

Da x og y er valgt vilkårligt, f er kontinuert og sammensætningen af kontinuerte funktioner er kontinuert, er det ønskede bevist. $\square$

Del (c)

Der gælder for ethvert $t_1, t_2 \in I$, at

$$\left\| \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, dt \right\| \leq \left| \int_{t_1}^{t_2} \|f(t)\|\, dt \right|.$$

Bemærkning. Da både $\|\cdot\|$ og f er kontinuerte på I, er sætningen meningsfyldt.

Bevis. Antag w.l.o.g., at $t_2 > t_1$ og inddel dernæst intervallet $[t_1, t_2]$ i en endelig sekvens $t_1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = t_2$. Lad $x_i \leq t_i \leq x_{i+1}$ for ethvert $i \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Vi vil nu approksimere med Riemannsummer, så lad os regne løs:

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(x_{i+1} - x_i) \right\| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \|f(t_i)(x_{i+1} - x_i)\| = \sum_{i=0}^{n-1} \|f(t_i)\|\, |x_{i+1} - x_i| \\ &\overset{(\alpha)}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \|f(t_i)\|\, (x_{i+1} - x_i) \overset{(\beta)}{=} \left| \sum_{i=0}^{n-1} \|f(t_i)\|\, (x_{i+1} - x_i) \right|.\end{aligned}$$

I (α) bruger vi, at $x_{i+1} \geq x_i$, mens egenskaben $t_{i+1} > t_i$ udnyttes i (β). Af sætningen om følgekontinuitet, samt at både $\|\cdot\|$ og f er kontinuerte, har vi at både eksistensen og entydigheden af følgende to udtryk holder:

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(x_{i+1} - x_i) \right\| = \left\| \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, dt \right\|,$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \sum_{i=0}^{n-1} \|f(t_i)\|\, (x_{i+1} - x_i) \right| = \left| \int_{t_1}^{t_2} \|f(t)\|\, dt \right|.$$

Tilfældet $t_2 < t_1$ er helt analogt, hvilket fuldfører beviset. $\square$

Litteratur

[Bet] David Betounes. *Differential Equations: Theory and Applications with Maple®*, 1. udgave. Springer-Verlag New York, New York, USA 2002.