Mundtlig eksamen

Sætning
Den reducerede rækkeechelonform af en matrix A *er entydigt bestemt.*

Bevis
Lad A være en $m \times n$-matrix med rækkeechelonformen H og lad V betegne rækkerummet af A (og dermed også af H). Lad $W_k = \text{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k)$ betegne det underrum af $\mathbb{R}^n$, der dannes af de k første rækker i $n \times n$-enhedsmatricen, I_n. Betragt desuden afbildningen $T_k : V \to W_k$, der er givet ved

$$T_k([x_1, x_2, \ldots, x_n]) = [x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0].$$

Del (a)

Vi viser, at T_k er en lineær transformation af V ind i W_k og at $T_k[V] = \{T_k(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in V\}$ er et underrum af W_k.

Først finder vi, ved en direkte udregning, at

$$\begin{aligned} T_k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= [u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_k + v_k, 0, \ldots, 0] \\ &= [u_1, u_2, \ldots, u_k, 0, \ldots, 0] + [v_1, v_2, \ldots, v_k, 0, \ldots, 0] \\ &= T_k(\mathbf{u}) + T_k(\mathbf{v}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_k(r\mathbf{u}) &= [ru_1, ru_3, \ldots, ru_k, 0, \ldots, 0] \\ &= r[u_1, u_3, \ldots, u_k, 0, \ldots, 0] \\ &= rT_k(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

Heraf ses, at T_k er en lineær transformation. Vi ser også, at $T_k[V] \subseteq W_k$, hvilket betyder, at T_k er et underrum af W_k.

Del (b)

Som det næste, vil vi vise, at hvis vi definerer $\dim(T_k[V]) \equiv d_k$, har vi for ethvert $j < n$, at enter er $d_{j+1} = d_j$ eller $d_{j+1} = d_j + 1$.

Da $T_k[V]$ er et underrum af $T_{k+1}[V]$, har vi

$$d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n \leq n.$$

Hvis den j'te søjle i H har en pivot, men det $(j+1)$'te ikke har, er $d_{j+1} = d_j$. Men hvis både den j'te og $(j+1)$'te søjle har pivoter, er $d_{j+1} = d_j + 1$.

Del (c)

Nu vil vi bevise, at for enhver matrix $\mathbf{A}$, er antallet af pivoter og placeringen af hver pivot i en vilkårlig rækkeechelonform af $\mathbf{A}$ altid den samme.

Antallet af pivoter i $\mathbf{H}$ er antallet af forskellige dimensioner i listen $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Vi har yderligere, at en pivot kun forekommer i den $(j+1)$'te søjle, hvis $d_{j+1} = d_j + 1$; række- og søjlepositionerne af pivoterne er fuldstændigt fastlagt ud fra listen $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Pivoten i den k'te række forekommer i den j'te søjle, hvis – og kun hvis – d_j er det k'te *forskellige*, hele tal i listen $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Da tallene d_i kun afhænger af $\mathbf{A}$ (de er kun defineret med hensyn til rækkerummet i $\mathbf{A}$), så antallet og positionerne af pivoterne, er tallene og positionerne de samme for alle echelonformer af $\mathbf{A}$.

Del (d)

Vi er nu i stand til at bevise, at den reducerede rækkeechelonform af en matrix $\mathbf{A}$ er entydigt bestemt.

Lad $\mathbf{H}$ være en *reduceret* rækkeechelonform af $\mathbf{A}$. Af Del (c) har vi, at antallet af pivoter og deres position kun afhænger af $\mathbf{A}$, hvilket medfører, at antallet af nulrækker kun afhænger af $\mathbf{A}$ og er det samme for alle valg af $\mathbf{H}$. Antag, at pivoten i den k'te række i $\mathbf{H}$ er i søjle j. Betragt nu en ikke-nulvektor i $\mathbb{R}^n$, som har nulindgange i alle komponenter, svarende til søjlerne i $\mathbf{H}$, der indeholder pivoter, lige bortset fra den j'te komponent, hvor indgangen er 1. Indgange i komponenter, der ikke svarer til pivotsøjlepositioner i $\mathbf{H}$, kan vælges vilkårligt. Vi påstår, at der findes en sådanne *entydig* vektor i rækkerummet i $\mathbf{A}$, nemlig den k'te rækkevektor i $\mathbf{H}$. En sådan må nødvendigvis være en linearkombination af ikke-nulrækkerne i $\mathbf{H}$, som udspænder rækkerummet i $\mathbf{A}$. Det faktum, at der er nullet både over og under pivoterne i den reducerede rækkeechelonform fra $\mathbf{H}$ viser, at den eneste mulige linearkombination af ikke-nulrækker i $\mathbf{H}$ er 1 gange den k'te række plus 0 gange de andre rækker. Dette giver en karakteristik af den k'te ikke-nulrække i $\mathbf{H}$, ud fra rækkerummet i $\mathbf{A}$. Dette viser, at den reducerede rækkeechelonform af en matrix $\mathbf{A}$ er entydig. $\square$