Aflevering i uge 35

Vi skal have fundet den løsning til

$$u''(t) - 2u'(t) - 8u(t) = 6 - 8t, \tag{1}$$

med $t \in I \subseteq \mathbb{R}$, hvor vi om I kun kan sige, at det er det åbent interval, der indeholder punktet 1, så lad $t_0 = 1$. Dette følger af startbetingelserne $u(1) = 0$ og $u'(1) = 1$.

Det ses nemt, at det karakteristiske polynomium $\lambda^2 - 2\lambda - 8$ har rødderne $\lambda_1 = 4$ og $\lambda_2 = -2$. Af Sætning 5.3.6 i [STT] følger det nu, at en partikulær løsning til den homogene analog til (1) er givet ved

$$\begin{aligned}
u_0(t) &= \int_1^t \frac{e^{4(t-s)} - e^{-2(t-s)}}{4-(-2)}(6-8s)ds \\
&= \int_1^t \big(e^{4t-4s} - e^{-2t+2s}\big)\big(1 - \tfrac{4}{3}s\big)ds \\
&= \int_1^t \left(\frac{e^{4t}}{e^{4s}} - \frac{4se^{4t}}{3e^{4s}} - \frac{e^{2s}}{e^{2t}} + \frac{4se^{2s}}{3e^{2t}}\right)ds \\
&= e^{4t}\int_1^t e^{-4s}ds - \tfrac{4}{3}e^{4t}\int_1^t se^{-4s}ds - e^{-2t}\int_1^t e^{2s}ds + \tfrac{4}{3}e^{-2t}\int_1^t se^{2e}ds, \qquad (2)
\end{aligned}$$

For at bestemme $\int xe^{ax}dx$, med konstanten $a \in \mathbb{C}$, bruger vi formlen for integration af et produkt. Med

$$\begin{aligned}
f(x) &= x, & g(x) &= e^{ax}, \\
f'(x) &= 1, & \int g(x)dx &= \frac{e^{ax}}{a},
\end{aligned}$$

fås følgende:

$$\int xe^{ax}dx = x \cdot \frac{e^{ax}}{a} - \int 1 \cdot \frac{e^{ax}}{a}dx = \frac{x}{a}e^{ax} - \frac{1}{a}\frac{e^{ax}}{a} + C = \frac{1}{a^2}(ax-1)e^{ax} + C,$$

hvor $C \in \mathbb{C}$ er en integrationskonstant. Nu er det bare at indsætte $a = -4$ henholdsvis $a = 2$ i (2) og derefter reducere udtrykket, hvilket er triviel calculus, så det springer jeg over, og konstatere, at man ender med følgende partikulære løsning til den homogene analog til (1):

$$u_0(t) = -\frac{1}{6e^4}e^{4t} + \frac{e^2}{6}e^{-2t} + t - 1.$$

Af Sætning 5.3.5 i [STT] ved vi, at samtlige løsning til (1) er givet ved $u(t) = u_0(t) + \widetilde{C}_1 e^{\lambda_1 t} + \widetilde{C}_2 e^{\lambda_2 t}$, så altså er

$$\begin{aligned} u(t) &= \left(-\frac{1}{6e^4} + \widetilde{C}_1\right)e^{4t} + \left(\frac{e^2}{6} + \widetilde{C}_2\right)e^{-2t} + t - 1 \\ &= C_1 e^{4t} + C_2 e^{-2t} + t - 1, \end{aligned} \tag{3}$$

for $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$.

Af startbetingelsen $u(1) = 0$, fås nu følgende:

$$C_1 e^{4\cdot 1} + C_2 e^{-2\cdot 1} + 1 - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad C_1 e^4 + C_2 e^{-2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad C_1 = -e^{-6} C_2.$$

Af den anden startbetingelse ses det, at (3) skal differentieres:

$$u'(t) = 4C_1 e^{4t} - 2C_2 e^{-2t} + 1.$$

Altså har vi, at

$$u'(1) = 1 \quad \Longrightarrow \quad 4C_1 e^4 - 2C_2 e^{-2t} + 1 = 1 \quad \Longrightarrow \quad 4\left(-e^{-6}C_2\right)e^{-4} - 2C_2 e^{-2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4e^{-2}C_2 - 2e^{-2}C_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2e^{-2}C_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad C_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad C_1 = 0.$$

Ved at indsætte de netop fundne værdier af C_1 og C_2 i (3), ses det nu direkte, at den søgte løsning til (1) er givet ved

$$u(t) = t - 1. \tag{4}$$

Denne løsning er ifølge Sætning 5.3.7 i [STT] entydigt bestemt, og vi er dermed færdige.

Litteratur

[STT] Henrik Stetkær, Klaus Thomsen og Christina Tønnesen-Friedman. *Indledning til matematisk analyse II*, 1. udgave. Aarhus Universitet, Århus, Danmark 2002.