Aflevering i uge 15

Opgave 5.3.12

Jeg skal have løst følgende lineære differentialligningssystem:

$$\begin{aligned} x_1' &= -3x_1 + 5x_2 - 20x_3, \\ x_2' &= 2x_1 \phantom{{}+5x_2} + 8x_3, \\ x_3' &= 2x_1 + x_2 + 7x_3. \end{aligned} \tag{1}$$

Jeg skal først have diagonaliseret koefficientmatricen for (1), som er givet ved

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -20 \\ 2 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Lad nu I betegne identitetsmatricen. Der gælder så, at

$$\begin{aligned} |\mathsf{A} - \lambda \mathsf{I}| &= \begin{vmatrix} -3-\lambda & 5 & -20 \\ 2 & 0-\lambda & 8 \\ 2 & 1 & 7-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-3-\lambda)\big((0-\lambda)(7-\lambda) - 1 \cdot 8\big) - 5\big(2(7-\lambda) - 2 \cdot 8\big) + (-20)\big(2 \cdot 1 - 2(0-\lambda)\big) \\ &= -(3+\lambda)(-7\lambda + \lambda^2 - 8) - 5(14 - 2\lambda - 16) - 20(2 + 2\lambda) \\ &= 21\lambda - 3\lambda^2 + 24 + 7\lambda^2 - \lambda^3 + 8\lambda - 70 + 10\lambda + 80 - 40 - 40\lambda \\ &= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - \lambda - 6 \\ &= -(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-3). \end{aligned} \tag{2}$$

Faktoriseringen fås ved at „gætte" en rod i polynomiet og så bruge polynomiers division (kendt fra gymnasiet). Derefter bestemmes så rødderne i det netop fremkomne polynomium, og voila, man kan faktorisere.

Nu giver (2) mig, at egenværdierne for A er $\lambda = -1$, $\lambda = 2$ og $\lambda = 3$, og de tilhørende egenvektorer findes ved at løse de tre tilsvarende homogene, lineære ligningssystemer, men denne hoben beregninger vil jeg skåne dig for, og blot konstatere, at

$$\begin{aligned} \lambda &= -1: & \mathbf{v}_1 &= (-5, 2, 1), \\ \lambda &= 2: & \mathbf{v}_2 &= (-3, 1, 1), \\ \lambda &= 3: & \mathbf{v}_3 &= (-5, 2, 2). \end{aligned}$$

En mulig diagonalmatrix for A er altså

$$\mathsf{C} = \begin{pmatrix} -5 & -3 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Af den første ligning i afsnit 5.3 i [BF][1], får jeg nu direkte, at

$$\mathsf{D} = \mathsf{C}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{C} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}.$$

Lad nu $\mathbf{x} = \mathsf{C}\mathbf{y}$, så er

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1, \\ y_2' &= \ 2y_2, \\ y_3' &= \ 3y_3. \end{aligned}$$

Dette ligningssystem løses nemt til

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1e^{-t} \\ C_2e^{2t} \\ C_3e^{3t} \end{pmatrix},$$

hvor $C_1, C_2, C_3, t \in \mathbb{R}$. Altså er løsningen til (1) givet ved

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -3 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1e^{-t} \\ C_2e^{2t} \\ C_3e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5C_1e^{-t} - 3C_2e^{2t} - 5C_3e^{3t} \\ 2C_2e^{2t} + \ C_2e^{2t} + 2C_3e^{3t} \\ C_3e^{3t} + \ C_2e^{2t} + 2C_3e^{3t} \end{pmatrix}.$$

[1] Forkortelse for „Linear Algebra“, 3. udgave, af R. A. Beauregard og J. B. Fraleigh.