TØ-opgaver til uge 45

Først laver vi en liste over de ligninger med mere i [IPT], der skal bruges:

[1]: Ligning (2.5) på side 4.
[2]: Ligning (2.6) på side 5.
[3]: Sætning 3.1, ligning (3.3) på side 7.
[4]: Sætning 3.1, ligning (3.4) på side 7.
[5]: Sætning 3.1, ligning (3.5) på side 7.
[6]: Ligning (4.2) på side 13.
[7]: Ligningen øverst på side 125.
[8]: Ligning (A.3) på side 126.
[9]: Ligning (A.4) på side 126.
[10]: Implikation (A.8) på side 127.
[11]: Ligning (B.3) på side 131.

Opgave 1

Lad A og B være hændelser, således at $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}5$ og $P(A \cup B) = 0{,}8$. Vi skal nu have bestemt sandsynligheden for hver af hændelserne $A \cap B$, $A^{\complement}$, $B^{\complement}$, $A^{\complement} \cap B^{\complement}$ og $A^{\complement} \cup B^{\complement}$. Vi finder følgende:

$$P(A \cap B) \overset{[5]}{=} P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0{,}6 + 0{,}5 - 0{,}8 = \underline{\underline{0{,}3}};$$

$$P\left(A^{\complement}\right) \overset{[4]}{=} 1 - P(A) = 1 - 0{,}6 = \underline{\underline{0{,}4}};$$

$$P\left(B^{\complement}\right) \overset{[4]}{=} 1 - P(B) = 1 - 0{,}5 = \underline{\underline{0{,}5}};$$

$$P\left(A^{\complement} \cap B^{\complement}\right) \overset{[8]}{=} P\left((A \cup B)^{\complement}\right) \overset{[4]}{=} 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}8 = \underline{\underline{0{,}2}};$$

$$P\left(A^{\complement} \cup B^{\complement}\right) \overset{[9]}{=} P\left((A \cap B)^{\complement}\right) \overset{[4]}{=} 1 - P(A \cap B) = 1 - 0{,}3 = \underline{\underline{0{,}7}}.$$

Opgave 2

Betragt spillet „*kast med* 3 *mønter* (m_1, m_2 *og* m_3)“, hvor der er tale om „perfekte“ mønter i den forstand, at sandsynligheden for at slå plat (p) henholdsvis krone (k) begge er 50 %.

Vi har nu et sandsynlighedsrum $(E, \mathcal{F}, P)$, hvor

$E = \{(m_1, m_2, m_3) \mid (p,p,p), (p,p,k), (p,k,p), (k,p,p), (p,k,k), (k,p,k), (k,k,p), (k,k,k)\}$,

$\mathcal{F}$ er en σ-algebra, bestående af samtlige delmængder af E,

$P : \mathcal{F} \to [0,1]$ er et *uniformt* sandsynlighedsmål på $\mathcal{F}$.

Spørgsmål (i)

En simpel optælling viser, at $\#E = 8$, så der er altså 8 mulige udfald.

Spørgsmål (ii)

Betragt hændelserne, der er givet ved

$$\begin{aligned}
A &= \{(m_1, m_2, m_3) \mid \text{Alle mønter viser plat}\} &&= \{(p,p,p)\},\\
B &= \{(m_1, m_2, m_3) \mid \text{Mindst én mønt viser krone}\} &&= \{(p,p,p)\}^C,\\
C &= \{(m_1, m_2, m_3) \mid \text{Netop én mønt viser krone}\} &&= \{(p,p,k),(p,k,p),(k,p,p)\}.
\end{aligned}$$

Vi bemærker, at $\#A = 1$, $\#B = \#E - \#A = 7$ og $\#C = 3$, så

$$P(A) \overset{[1]}{=} \frac{\#A}{\#E} = \underline{\underline{\frac{1}{8}}}; \qquad P(B) \overset{[1]}{=} \frac{\#B}{\#E} = \underline{\underline{\frac{7}{8}}}; \qquad P(C) \overset{[1]}{=} \frac{\#C}{\#E} = \underline{\underline{\frac{3}{8}}}.$$

Spørgsmål (iii)

Se nu på spillet „*kast med $n \in \mathbb{N}$ mønter* $(m_1, \ldots, m_n)$“, og betragt sandsynlighedsrummet $(E, \mathcal{F}, P)$, hvor P og $\mathcal{F}$ er givet som i Spørgsmål (ii), hvorimod der nu gælder, at

$$E = \{\text{Samtlige permutationer af } n\text{-tuplet } (m_1, \ldots, m_n)\}.$$

Lad yderligere $A, B, C \in \mathcal{F}$ været givet som ovenfor. Igen ønsker vi at finde $P(A)$, $P(B)$ og $P(C)$, så først husker vi på, at

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Af [11] har vi nu, at

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

hvor vi kan betragte k som antallet af mønter, der viser krone (eller plat), med koefficienterne $\binom{n}{k}$ som antallet af muligheder for, at k af de n mønter viser krone (eller plat). Dette gør det ganske nemt at løse opgaven, thi så har vi nemlig, at

$$\begin{aligned}
P(A) &\overset{[1]}{=} \frac{\#A}{\#E} = \frac{\binom{n}{0}}{2^n} = \underline{\underline{2^{-n}}},\\
P(B) &\overset{[1]}{=} \frac{\#B}{\#E} \overset{[4]}{=} 1 - P(A) = \underline{\underline{1 - 2^{-n}}},\\
P(C) &\overset{[1]}{=} \frac{\#C}{\#E} = \frac{\binom{n}{1}}{2^n} = \underline{\underline{n \cdot 2^{-n}}}.
\end{aligned}$$

Spørgsmål (iv)

Som det sidste i denne opgave, skal vi have afgjort hvor mange mønter vi skal have, før sandsynligheden for at få mindst én krone er større end 95 %. Af Spørgsmål (ii) ser vi, at dette svarer til at finde det mindste $n \in \mathbb{N}$, der opfylder uligheden

$$1 - 2^{-n} > 0{,}95.$$

Dette er nemt klaret, for om følgen $S_n := \{1 - 2^{-n}\}_{n=0}^{\infty}$ gælder der, at

$$\begin{aligned} S_4 &= 1 - 2^{-4} = \frac{15}{16} = 0{,}9375 < 0{,}95, \\ S_5 &= 1 - 2^{-5} = \frac{31}{32} = 0{,}96875 > 0{,}95, \end{aligned}$$

så svaret er 5 mønter.

Opgave 4

Betragt det *uniforme* sandsynlighedsmål på $E = [0, 10]$. Da E er et interval, vælger vi $\mathcal{F} = \mathcal{B}(E)$. Vi har nu hændelserne $A, B, C \in \mathcal{F}$, hvor $A = [0, 5]$, $B = [1, 7]$ og $C = [4, 9]$.

Nu skal vi have undersøgt, hvorvidt (A og B), (A og C) og (B og C) er uafhængige. Altså skal vi undersøge, hvilke af de tre kombinationer, der opfylder [6]. Først fås, at

$$A \cap B = [1, 5], \qquad A \cap C = [4, 5], \qquad B \cap C = [4, 7],$$

hvilket giver følgende:

$$\begin{aligned} |A| &= 5 - 0 = 5, & |B| &= 7 - 1 = 6, & |C| &= 9 - 4 = 5, \\ |A \cap B| &= 5 - 1 = 4, & |A \cap C| &= 5 - 4 = 1, & |B \cap C| &= 7 - 4 = 3. \end{aligned}$$

Da $|E| = 10 - 0 = 10$, er

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &\overset{[2]}{=} \frac{|A \cap B|}{|E|} = \frac{4}{10}, & P(A)P(B) &\overset{[2]}{=} \frac{|A|}{|E|}\frac{|B|}{|E|} = \frac{5}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{3}{10}. \\ P(A \cap C) &\overset{[2]}{=} \frac{|A \cap C|}{|E|} = \frac{1}{10}, & P(A)P(C) &\overset{[2]}{=} \frac{|A|}{|E|}\frac{|C|}{|E|} = \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{5}{20}. \\ P(B \cap C) &\overset{[2]}{=} \frac{|B \cap C|}{|E|} = \frac{3}{10}, & P(B)P(C) &\overset{[2]}{=} \frac{|B|}{|E|}\frac{|C|}{|E|} = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{3}{10}. \end{aligned}$$

Af [6] fås så, at A og B er ikke uafhængige, A og C er heller ikke uafhængige, hvorimod B og C er uafhængige.

Opgave 12

Vi ser nu på spillet „*en mønt kastes* 2 *gange* (m_1 *og* m_2)“, hvor der er tale om „perfekte“ mønter; sandsynligheden for at slå plat (p) henholdsvis krone (k) er 1/2 for hver.

Betragt sandsynlighedsrummet $(E, \mathcal{F}, P)$, hvor

$$E = \{(m_1, m_2) \mid (p,p), (p,k), (k,p), (k,k)\},$$
$$\mathcal{F} \text{ er en } \sigma\text{-algebra, bestående af samtlige delmængder af } E,$$
$$P : \mathcal{F} \to [0,1] \text{ er et } \textit{uniformt} \text{ sandsynlighedsmål på } \mathcal{F}.$$

Som det næste, definerer vi nu to hændelser $A, B \in \mathcal{F}$ ved

$$\begin{aligned} A &= \{(m_1, m_2) \mid \text{Plat i første kast}\} &&= \{(p,p), (p,k)\}, \\ B &= \{(m_1, m_2) \mid \text{Krone i andet kast}\} &&= \{(p,k), (k,k)\}. \end{aligned}$$

Da $A \cap B = \{(p,k)\} \neq \emptyset$, ser vi af [7], at A og B ikke er disjunkte hændelser.

Opgave 14

Lad $(E, \mathcal{F}, P)$ være et sandsynlighedsrum og lad $A \in \mathcal{F}$ være en hændelse. Vi skal have vist følgende biimplikation:

$$A \text{ er uafhængig af sig selv} \quad \Longleftrightarrow \quad P(A) = 0 \text{ eller } P(A) = 1.$$

Først beviser vi $\Longrightarrow$-delen. Antag derfor, at A er uafhængig af sig selv. Da $A = A \cap A$, er

$$P(A) = P(A \cap A) \overset{[6]}{=} P(A)P(A) = (P(A))^2.$$

Dette er tydeligvis kun opfyldt, såfremt $P(A) = 0$ eller $P(A) = 1$.

Lad os dernæst bevise $\Longleftarrow$-delen, så antag derfor, at $P(A) = 0$. Af Opgave 13 har vi, at $P(A \cup A) = 0$, så

$$P(A \cap A) \overset{[5]}{=} P(A) + P(A) - P(A \cup A) = 0 + 0 - 0 = 0.$$

Eftersom $P(A \cap A) = (P(A))^2$, følger det af [6], at A er uafhængig af sig selv. Antag nu, at $P(A) = 1$. Ifølge Opgave 13 har vi så, at $P(A \cap A) = 1$. Altså er $P(A \cap A) = (P(A))^2$, og igen bruger vi [6] til at konkludere, at A er uafhængig af sig selv.

Opgave 15

Lad $(E, \mathcal{F}, P)$ være et sandsynlighedsrum, hvor $\mathcal{F}$ er en σ-algebra, og lad $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ være uafhængige hændelser. Af [10] har vi, at $A_1^{\complement}, A_2^{\complement} \in \mathcal{F}$.

Spørgsmål (i)

Vi skal nu have vist, at A_1 og $A_2^\complement$ er uafhængige hændelser. Det første man bemærker er, at $A_1 \cap A_2^\complement = A_1 \setminus (A_1 \cap A_2)$. Da $A_1 \cap A_2 \subseteq A_1$, har vi følgende:

$$\begin{aligned} P\Big(A_1 \cap A_2^\complement\Big) &= P(A_1 \setminus (A_1 \cap A_2)) \\ &\overset{[3]}{=} P(A_1) - P(A_1 \cap A_2) \\ &\overset{[6]}{=} P(A_1) - P(A_1)P(A_2) \\ &= P(A_1)(1 - P(A_2)) \\ &\overset{[4]}{=} P(A_1)P\big(A_2^\complement\big). \end{aligned}$$

Af [6] følger det nu, at A_1 og $A_2^\complement$ er uafhængige.

Spørgsmål (ii)

Som det næste skal vi vise, at $A_1^\complement$ og $A_2^\complement$ er uafhængige hændelser. En direkte udregning viser, at

$$\begin{aligned} P\Big(A_1^\complement \cap A_2^\complement\Big) &\overset{[9]}{=} P\big((A_1 \cup A_2)^\complement\big) \\ &\overset{[4]}{=} 1 - P(A_1 \cup A_2) \\ &\overset{[5]}{=} 1 - \big(P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)\big) \\ &\overset{[6]}{=} 1 - P(A_1) - P(A_2) + P(A_1)P(A_2) \\ &= (1 - P(A_1))(1 - P(A_2)) \\ &\overset{[4]}{=} P\big(A_1^\complement\big)P\big(A_2^\complement\big). \end{aligned}$$

Igen bruger vi [6] til at konkludere, at $A_1^\complement$ og $A_2^\complement$ er uafhængige hændelser.

Opgave 48

Betragt spillet „*kast med* 4 *terninger* (t_1, t_2, t_3 *og* t_4)“. Terningerne er „perfekte“ i den forstand, at der er lige stor sandsynlighed for at en terning viser en af øjentallene $1, \ldots, 6$. Slås fire ens, får man en gratis øl, og ellers koster øllen det samlede antal øjne på de fire terninger.

Vi har et sandsynlighedsrum $(E, \mathcal{F}, P)$, hvor

$$\begin{aligned} &E = \{(t_1, t_2, t_3, t_4) \mid t_i = 1, \ldots, 6 \text{ for } i = 1, \ldots, 4\}, \\ &\mathcal{F} \text{ er en } \sigma\text{-algebra, bestående af samtlige delmængder af } E, \\ &P : \mathcal{F} \to [0, 1] \text{ er et } \textit{uniformt} \text{ sandsynlighedsmål på } \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Spørgsmål (i)

Betragt nu de to hændelser $A, B \in \mathcal{F}$, hvor

$$\begin{aligned} A &= \text{Man får en gratis øl} \\ &= \{(t_1, t_2, t_3, t_4) \mid \text{Alle fire terninger viser det samme antal øjne}\} \\ &= \{(1,1,1,1), (2,2,2,2), (3,3,3,3), (4,4,4,4), (5,5,5,5), (6,6,6,6)\}, \end{aligned}$$

$$B = \text{Man skal betale for sin øl} = A^C.$$

Vi har nu, at $\#E = 6^4 = 1296$ og $\#A = 6$. Altså er

$$\begin{aligned} P(A) &\overset{[1]}{=} \frac{\#A}{\#E} = \frac{6}{1296} = \underline{\underline{\frac{1}{216}}}, \\ P(B) &\overset{[4]}{=} 1 - P(A) = \frac{216}{216} - \frac{1}{216} = \underline{\underline{\frac{215}{216}}}. \end{aligned}$$

Spørgsmål (ii)

Lad nu $C \in \mathcal{F}$ være givet ved

$$C = \text{Summen af de viste øjne, på de fire terninger.}$$

Analogt Opgave 2 fås, at

$$\#\{C = 23\} = \binom{4}{1} = 4, \qquad \#\{C = 22\} = \binom{4}{1} + \binom{4}{2} = 4 + 6 = 10.$$

Dette giver så følgende:

$$\begin{aligned} P(\{C = 23\}) &\overset{[1]}{=} \frac{\#\{C = 23\}}{\#E} = \frac{4}{1296} = \underline{\underline{\frac{1}{324}}}; \\ P(\{C = 22\}) &\overset{[1]}{=} \frac{\#\{C = 22\}}{\#E} = \frac{10}{1296} = \underline{\underline{\frac{5}{648}}}. \end{aligned}$$

Litteratur

[IPT] Preben Blæsild og Jan Pedersen. *An Introduction to Probability Theory*, 3. udgave. Aarhus Universitet, Danmark 2004.