Aflevering i uge 19

Opgave 8.4.6

Betragt den symmetriske matrix

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Dette giver mig, at

$$\det(\mathsf{A} - \lambda \mathsf{I}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 \\ 5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 5 \cdot 5 = \lambda^2 - 6\lambda - 16 = (\lambda - 8)(\lambda + 2) = 0.$$

Egenværdierne for A er altså $\lambda_1 = 8$ og $\lambda_2 = -2$, og egenvektorerne hørende til egenværdierne, ses meget nemt at være

$$\begin{aligned} \lambda_1 = \ \ 8: &\qquad \mathbf{v}_1 = (1, \ \ 1), &\qquad \|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{2}, \\ \lambda_2 = -2: &\qquad \mathbf{v}_2 = (1, -1), &\qquad \|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Egenvektorerne, der danner en ortonormalbasis, er

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Spektralkompositionen af A er ifølge ligning (8) på side 444 i [BF][1] nu givet ved

$$\mathsf{A} = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i \mathbf{b}_i \mathbf{b}_i^T = 8\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Opgave 8.4.10

Igen betrager vi (1). For at finde den matrix, men får ved deflation, efter at have fundet $\max\{|\lambda_i|\}$ og en tilhørende (enheds-)egenvektor, bruger jeg direkte ligning (9) på side 445 i [BF]. Da der kun er to egenværdier for A, er $\max\{|\lambda_i|\} = |\lambda_2| = 2$ den eneste mulighed, med en tilhørende enhedsegenvektor $\mathbf{b}_2 = \big(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\big)$, så altså er den søgte matrix

$$\begin{aligned} \mathsf{A} - \lambda_1 \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1^T &= \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} - 8\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} - 8\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

[1] Forkortelse for „Linear Algebra“, 3. udgave, af R. A. Beauregard og J. B. Fraleigh.