Aflevering i uge 5

Opgave 282

Proposition 1. *Lad I være et interval og $f : I \to \mathbb{R}$ en reel funktion. Hvis f er voksende, så gælder enten, at f er strengt voksende, eller at der findes et delinterval af I, hvorpå f er konstant.*

Bevis. Antag, at f er voksende på I. Der gælder så, at

$$\forall\, x, y \in I : x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y). \tag{1}$$

At f *ikke* er voksende på I betyder så, at

$$\exists\, x, y \in I : x < y \wedge f(x) \geq f(y). \tag{2}$$

Ved kombination af (1) og (2) ses det, at antagelsen leder til, at der eksisterer $x < y$, således at $f(x) = f(y)$. Lad nu $z \in [x, y]$. Da f er voksende, har jeg så videre, at

$$f(x) \leq f(z) \leq f(y) = f(x).$$

Altså er $f(z) = f(x)$ for ethvert $z \in [x, y]$, og jeg har hermed bevist, at f er konstant på intervallet $[x, y] \subseteq I$. □

Bemærkning. Det beviste udsagn er på formen $P \Longrightarrow (Q \vee R)$, og jeg valgte at vise, at $(P \vee \neg Q) \Longrightarrow R$. Ved at opstille en tabel magen til en af dem i Appendiks A.3 i [ETP][1], indser man dog, at disse to udsagn er ens.

Proposition 2. *Lad I være et interval og lad $f : I \to \mathbb{R}$ være en reel funktion, der er kontinuert på I og differentiabel i det indre af I. Hvis $f'(x) \geq 0$ for alle x, og hvis der ikke findes noget delinterval af I, hvori der gælder, at $f'(x) = 0$, så er f strengt voksende på I.*

Bevis. Af Sætning 7.14 fås, at hvis $f'(x) \geq 0$, så er f voksende på I. Altså vil der – ifølge Proposition 1 – gælde, at f enten er strengt voksende på I, eller at der eksisterer et interval på I, hvorpå f er konstant. Antag nu, at det sidste er tilfældet, så er $f'(x) = 0$ på dette interval. Dette er dog udelukket ifølge antagelserne, så f er strengt voksende på I. □

[1] Forkortelse for „Funktioner af en og flere variable", 2. udgave, af E. T. Poulsen.