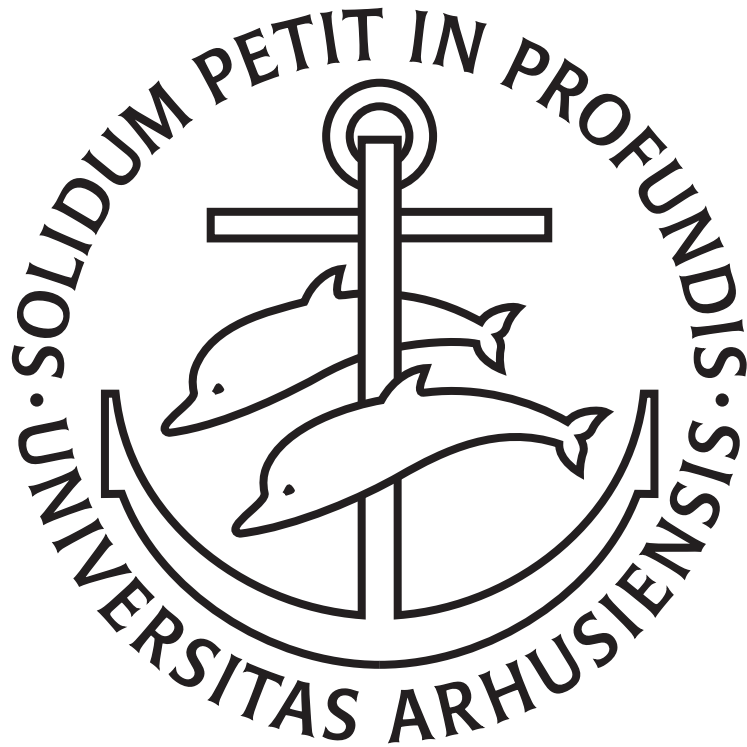


KOBLEDE SVINGNINGER



THOMAS DAN NIELSEN – 20041151
TROELS FÆRGEN-BAKMAR – 20041116
MADS SØRENSEN – 20040795

1. JUNI 2005

INSTITUT FOR FYSIK OG ASTRONOMI
DET NATURVIDENSKABELIGE FAKULTET
AARHUS UNIVERSITET

Indhold

Resumé	1
Det matematiske pendul	2
Udledning af ligning	2
Approksimation	3
Snorkoblede penduler	4
Udledning af ligninger	4
Approksimationer	7
Grafisk repræsentation	7
Fjederkoblede penduler	8
Udledning af ligninger	8
Approksimationer	11
Grafisk repræsentation	11
Stangkoblede penduler	12
Udledning af algoritme	12

Resumé

Vi undersøgte fire pendulsystemer, hvoraf de tre var koblede. Tre af de fire systemer undersøgte vi ved brug af Euler-Lagrangeligningen, og den sidste ved kraftbetragtninger. Euler-Lagranges ligning skrives som

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_{\text{Lag}}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_{\text{Lag}}}{\partial q_i} = 0, \quad \forall i \in [1, \dots, n],$$

hvor q_i er de variable for stedvektoren. På denne måde, kan man reducere den lagrangeske energi,

$$E_{\text{Lag}} := E_{\text{kin}} - E_{\text{pot}},$$

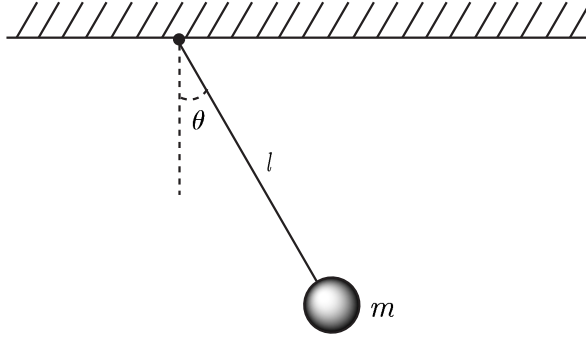
da alle led, hvori q_i og \dot{q}_i ikke indgår, har værdien nul.

Ved brug af denne teori, var vi i stand til at udlede nogle koblede differentilligninger af anden orden, der beskriver pendulernes bevægelse i tid og rum.

Med hensyn til det sidste system, så blev der anvendt kraftbetragtninger til at udlede en fremskrivningsalgoritme, der beskriver pendulernes bevægelse. Det lidt „specielle“ ved denne algoritme er, at den giver en eksakt beskrivelse af systemet.

Det matematiske pendul

Vi starter med at introducere den velkendte teori for bevægelsen af et ganske normalt matematisk pendul af typen, der er skitseret nedenfor:



FIGUR 1: Matematisk pendul, der svinger i papirets plan.

Om pendulet antager vi, at snoren er masseløs, alle former for friktion negligeres og tyngdeaccelerationen er konstant, med værdien g . Vi vil her introducere *den lagrangeske formulering af mekanikken*, der anvendes for to af de tre følgende koblede systemer.

Udledning af ligning

Af FIGUR 1 følger det, at da der vælges et kartesisk koordinatsystem med positiv retning opad, er pendulets position og hastighed samt kvadratet på dets fart givet ved

$$\mathbf{r} = (l \sin(\theta), -l \cos(\theta)) = l(\sin(\theta), -\cos(\theta)),$$

$$\mathbf{v} = l(\cos(\theta)\dot{\theta}, -(-\sin(\theta))\dot{\theta}) = l\dot{\theta}(\cos(\theta), \sin(\theta)),$$

$$v^2 = \|\mathbf{v}\|^2 = l^2\dot{\theta}^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = l^2\dot{\theta}^2,$$

hvor $\dot{\theta} \equiv \theta'(t)$. Pendulets Lagrangeenergi er så givet ved

$$E_{\text{Lag}} := E_{\text{kin}} - E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}mv^2 - mgh = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl \cos(\theta). \quad (1)$$

Som det næste, skal vi nu bruge Euler-Lagranges differentiaalligning,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_{\text{Lag}}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_{\text{Lag}}}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

der er velegnet til beskrivelse af koblede penduler, idet der kun behøves energibetragtinger. Da θ kun indgår i andet led i (1), er

$$\frac{\partial E_{\text{Lag}}}{\partial \theta} = mgl(-\sin(\theta)) = -mgl \sin(\theta).$$

Videre er

$$\frac{\partial E_{\text{Lag}}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2}ml^2 \cdot 2\dot{\theta} = ml^2\dot{\theta},$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_{\text{Lag}}}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta},$$

hvor $\ddot{\theta} \equiv \theta''(t)$. Ifølge (2), kan pendulets bevægelse – under de føromtalte forudsætninger – nu beskrives ved følgende ligning:

$$ml^2\ddot{\theta} - (-mgl \sin(\theta)) = 0 \implies \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0. \quad (3)$$

Man observerer, at (3) er en såkaldt ikke-lineær differentiaalligning af anden orden.

Approximation

Det er velkendt, at for små udsving, er $\sin(\theta) \simeq \theta$ en god approksimation. Dette giver anledning til en såkaldt linearisering af systemet, hvorved visse af de kvalitative egenskaber ved løsningskurverne bevares. Laves denne approksimation, forenkles (3) til

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0,$$

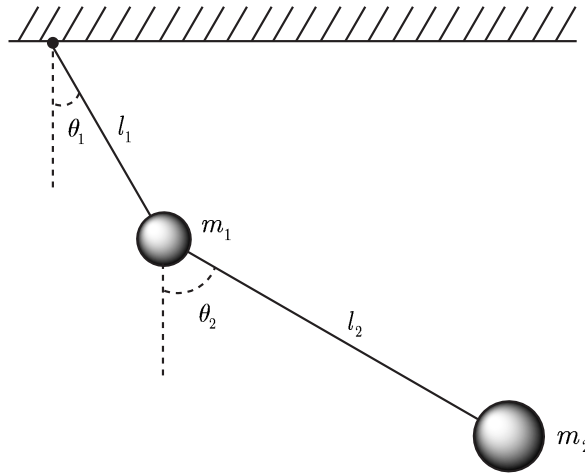
der er en ganske almindelig lineær differentiaalligning af anden orden, med den generelle løsning

$$\theta(t) = C_1 \exp(\sqrt{g/l} \cdot t) + C_2 \exp(-\sqrt{g/l} \cdot t),$$

hvor $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ er konstanter, der bestemmes ud fra systemets startbetingelser.

Snorkoblede penduler

Ved brug af den lagrangeske formulering af mekanikken, vil vi opstille nogle differentiallygninger, der beskriver to koblede matematiske penduler med masserne m_1 og m_2 , som er fastgjort i to masseløse, stive snore med længderne l_1 og l_2 . De to vinkler, som snorene danner med lodret, kalder vi θ_1 henholdsvis θ_2 . Tyngdeaccelerationen antages at være konstant med værdien g , og desuden negligeres enhver form for friktion.



FIGUR 2: Snorkoblede penduler, der svinger i papirets plan.

Udledning af ligninger

Ved samme fremgangsmåde som for det enkeltmatematisk pendul, vil vi nu beskrive systemet, vist på FIGUR 2. Det øverste pendul beskrives naturligvis helt på samme måde som det enkeltmatematisk pendul, så $v_1^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2$. Nu til det nederste pendul:

$$\mathbf{r}_2 = (l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_2), -l_1 \cos(\theta_1) - l_2 \cos(\theta_2)),$$

$$\mathbf{v}_2 = (l_1 \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1 + l_2 \cos(\theta_2) \dot{\theta}_2, l_1 \sin(\theta_1) \dot{\theta}_1 + l_2 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2).$$

Vi skal så have beregnet kvadratet på farten. Da $v^2 = \|\mathbf{v}\|^2$, er

$$\begin{aligned} v_2^2 &= l_1^2 \cos^2(\theta_1) \dot{\theta}_1^2 + 2l_1 \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1 l_2 \cos(\theta_2) \dot{\theta}_2 + l_2^2 \cos^2(\theta_2) \dot{\theta}_2^2 \\ &\quad + l_1^2 \sin^2(\theta_1) \dot{\theta}_1^2 + 2l_1 \sin(\theta_1) \dot{\theta}_1 l_2 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2 + l_2^2 \sin^2(\theta_2) \dot{\theta}_2^2 \\ &= l_1^2 \dot{\theta}_1^2 (\cos^2(\theta_1) + \sin^2(\theta_1)) + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 (\cos^2(\theta_2) + \sin^2(\theta_2)) \\ &\quad + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (\sin(\theta_1) \sin(\theta_2) + \cos(\theta_1) \cos(\theta_2)). \end{aligned}$$

Ved brug af den trigonometriske subtraktionsformel

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) + \cos(\theta_1) \cos(\theta_2),$$

og „Idiotformlen“, finder man, at

$$v_2^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2).$$

Systemets samlede kinetiske energi er altså

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= E_{\text{kin},1} + E_{\text{kin},2} \\ &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2). \end{aligned}$$

Den samlede potentielle energi er hurtigt bestemt:

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}} &= E_{\text{pot},1} + E_{\text{pot},2} \\ &= m_1 g h_1 + m_2 g h_2 \\ &= m_1 g (-l_1 \cos(\theta_1)) + m_2 g (-l_1 \cos(\theta_1) - l_2 \cos(\theta_2)) \\ &= -(m_1 + m_2) g l_1 \cos(\theta_1) - m_2 g l_2 \cos(\theta_2). \end{aligned}$$

Lagrangeenergien er ifølge ovenstående beregninger givet ved

$$\begin{aligned} E_{\text{Lag}} &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ &\quad + (m_1 + m_2) g l_1 \cos(\theta_1) + m_2 g l_2 \cos(\theta_2). \end{aligned} \quad (4)$$

Igen skal vi nu have opstillet Euler-Lagranges differentialligning, men denne gang både for θ_1 og θ_2 . Vi starter med θ_1 , så idet denne variabel indgår i tredje og fjerde led i (4), er

$$\frac{\partial E_{\text{Lag}}}{\partial \theta_1} = -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2) g l_1 \sin(\theta_1).$$

Yderligere har vi, at $\dot{\theta}_1$ indgår i første og tredje led i (4), så

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{\text{Lag}}}{\partial \dot{\theta}_1} &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \cdot 2\dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ &= (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2). \end{aligned}$$

Da højresiden af denne ligning er en sammensat funktion, har vi med $(f \cdot g)' = f'g + g'f$, at

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_{\text{Lag}}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \\ &= (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ &\quad - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2). \end{aligned}$$

Dette giver os, at

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_{\text{Lag}}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial E_{\text{Lag}}}{\partial \theta_1} &= (m_1 + m_2)l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\
&\quad - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\
&\quad - (-m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2)gl_1 \sin(\theta_1)) \\
&= (m_1 + m_2)l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\
&\quad + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)gl_1 \sin(\theta_1).
\end{aligned}$$

Man bemærker, at l_1 er en fælles faktor i alle leddene ovenfor, så Euler-Lagrangeligningen for θ_1 bliver hermed

$$(m_1 + m_2)l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)g \sin(\theta_1) = 0. \quad (5)$$

Nu fortsætter vi med θ_2 . Eftersom θ_2 indgår i tredje og femte led i (4), er

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_{\text{Lag}}}{\partial \theta_2} &= m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (-\sin(\theta_1 - \theta_2))(-1) + m_2 g l_2 (-\sin(\theta_2)) \\
&= m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 g l_2 \sin(\theta_2).
\end{aligned}$$

Yderligere har vi, at $\dot{\theta}_2$ indgår i andet og tredje led i (4), hvorved

$$\frac{\partial E_{\text{Lag}}}{\partial \dot{\theta}_2} = \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \cdot 2\dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) = m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2),$$

og dermed

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_{\text{Lag}}}{\partial \dot{\theta}_2} \right) &= m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \\
&= m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\
&\quad - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2).
\end{aligned}$$

Nu er vi snart ved vejs ende, for

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_{\text{Lag}}}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial E_{\text{Lag}}}{\partial \theta_2} &= m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\
&\quad - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\
&\quad - (m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 g l_2 \sin(\theta_2)) \\
&= m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\
&\quad - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g l_2 \sin(\theta_2).
\end{aligned}$$

Her indgår $m_2 l_2$ i hvert led, så den søgte ligning for θ_2 er altså

$$l_2 \ddot{\theta}_2 + l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + g \sin(\theta_2) = 0. \quad (6)$$

Approksimationer

Antag, at pendulerne kun udfører ganske små udsving, altså at $|\theta| \ll 1$, så er $\sin(\theta) \simeq \theta$ og $\cos(\theta) \simeq 1$ – og dermed $\sin(\theta_1 - \theta_2) \simeq 0$ og $\cos(\theta_1 - \theta_2) \simeq 1$ – gode approksimationer, hvilket tillader os at forenkle (5) og (6) til

$$(m_1 + m_2)l_1\ddot{\theta}_1 + m_2l_2\ddot{\theta}_2 + (m_1 + m_2)g \sin(\theta_1) = 0,$$

$$l_2\ddot{\theta}_2 + l_1\ddot{\theta}_1 + g\theta_2 = 0.$$

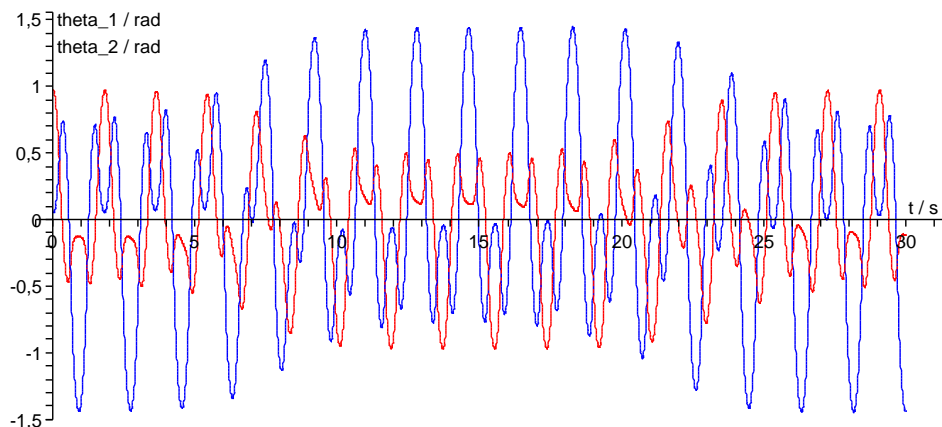
Grafisk repræsentation

De to ligninger (5) og (6) er såkaldte koblede differentiallyigninger, og for at kunne få noget brugbar information ud af dem, skal dette ligningssystem løses med hensyn til $\ddot{\theta}_1$ og $\ddot{\theta}_2$, hvorefter de fremkomne løsninger skal fremskrives numerisk efter følgende formler:

$$\dot{\theta}_{1,i+1} = \dot{\theta}_{1,i} + \ddot{\theta}_{1,i}\Delta t, \quad \theta_{1,i+1} = \theta_{1,i} + \dot{\theta}_{1,i}\Delta t,$$

$$\dot{\theta}_{2,i+1} = \dot{\theta}_{2,i} + \ddot{\theta}_{2,i}\Delta t, \quad \theta_{2,i+1} = \theta_{2,i} + \dot{\theta}_{2,i}\Delta t,$$

hvor $\ddot{\theta}_{1,i}$ og $\ddot{\theta}_{2,i}$ beregnes ud fra (5) og (6), med $\theta_1 = \theta_{1,i}$ og $\theta_2 = \theta_{2,i}$. Da løsningen til ligningssystemet, bestående af (5) og (6), er et stort og temmelig kompliceret udtryk, følger her nu blot et par grafer for pendulernes udsving som funktion af tiden:

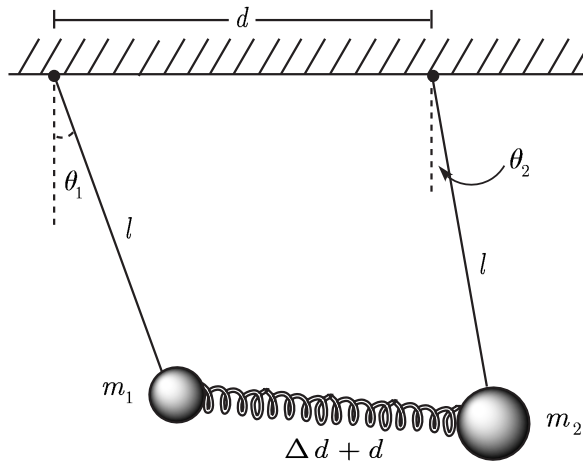


FIGUR 3: Numerisk løsning af (5) og (6), med startbetingelserne $m_1 = 85,77$ g, $m_2 = 99,53$ g, $l_1 = 48,2$ cm, $l_2 = 44,0$ cm, $\theta_1(0) = 0,97$ rad og $\theta_2(0) = 0$ rad. Den røde graf er for $\theta_1(t)$ og den blå er for $\theta_2(t)$.

Systemet på FIGUR 2 synes at svinge kaotisk, eller også er perioden i hvert tilfælde ganske stor.

Fjederkoblede penduler

Ved brug af den lagrangeske formulering af mekanikken, vil vi opstille nogle differentialligninger, der beskriver to koblede matematiske penduler med masserne m_1 og m_2 , som er fastgjort i to masseløse, stive snore med fælles længde l . Mellem pendulerne er der udspændt en fjeder med fjederkonstant k og naturlig længde d , der antages at være masseløs. De to vinkler, som snorene danner med lodret, kalder vi θ_1 henholdsvis θ_2 . Tyngdeaccelerationen antages at være konstant med værdien g , og desuden negligeres enhver form for friktion.



FIGUR 4: Fjederkoblede penduler, der svinger i papirets plan.

Udledning af ligninger

Fjederens potentielle energi er givet ved $\frac{1}{2}k(\Delta d)^2$, hvor Δd er ændringen i fjederens længde. Ved brug af Pythagoras' sætning, den trigonometriske identitet øverst side 5 og „Idiotformlen“, fås

$$\begin{aligned}
 (\Delta d)^2 &= \left(\sqrt{\left(d + (l \sin(\theta_2) - l \sin(\theta_1))\right)^2 + (l \cos(\theta_1) - l \cos(\theta_2))^2} - d \right)^2 \\
 &= \left(\left[d^2 + 2dl(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) + l^2(\sin^2(\theta_2) - 2\sin(\theta_1)\sin(\theta_2) + \sin^2(\theta_1)) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + l^2(\cos^2(\theta_1) - 2\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos^2(\theta_2)) \right]^{1/2} - d \right)^2 \\
 &= \left(\left[l^2(\sin^2(\theta_1) + \cos^2(\theta_1) + \sin^2(\theta_2) + \cos^2(\theta_2) - 2(\sin(\theta_1)\sin(\theta_2) + \cos(\theta_1)\cos(\theta_2))) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 2dl(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) + d^2 \right]^{1/2} - d \right)^2 \\
 &= \left(\sqrt{2l^2(1 - \cos(\theta_2 - \theta_1)) + 2dl(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) + d^2} - d \right)^2.
 \end{aligned}$$

For at lette notationen, definerer vi i det følgende $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ ved

$$\begin{aligned} f(\theta_1, \theta_2) &:= 2l^2(1 - \cos(\theta_2 - \theta_1)) + 2dl(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) + d^2 \\ &= 2l^2 - 2l^2 \cos(\theta_2 - \theta_1) + 2dl \sin(\theta_2) - 2dl \sin(\theta_1) + d^2. \end{aligned}$$

Systemets samlede potentielle energi er altså givet ved

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}} &= E_{\text{pot},1} + E_{\text{pot},2} + E_{\text{pot},\text{fjeder}} \\ &= m_1gh_1 + m_2gh_2 + \frac{1}{2}k(\Delta d)^2 \\ &= -m_1gl \cos(\theta_1) - m_2gl \cos(\theta_2) + \frac{1}{2}k(\sqrt{f(\theta_1, \theta_2)} - d)^2. \end{aligned}$$

Nu til den kinetiske energi: Da fjederen som sagt er antaget at være masseløs, er $E_{\text{kin},\text{fjeder}} = 0$. Igen kan vi nu drage nytte af de indledende beregninger for det matematiske pendul, for heraf ses nemlig direkte, at

$$E_{\text{kin}} = E_{\text{kin},1} + E_{\text{kin},2} + E_{\text{kin},\text{fjeder}} = \frac{1}{2}m_1l^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l^2\dot{\theta}_2^2.$$

Dette giver så, at

$$E_{\text{Lag}} = \frac{1}{2}m_1l^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l^2\dot{\theta}_2^2 + m_1gl \cos(\theta_1) + m_2gl \cos(\theta_2) - \frac{1}{2}k(\sqrt{f(\theta_1, \theta_2)} - d)^2. \quad (7)$$

For at finde den afledede af (7), med hensyn til θ_1 , skal vi nu bruge reglen for differentiation af sammensatte funktioner, der nemt giver os følgende:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta_1} [(\Delta d)^2] &= \frac{\partial}{\partial \theta_1} [(\sqrt{f(\theta_1, \theta_2)} - d)^2] = \frac{\sqrt{f(\theta_1, \theta_2)} - d}{\sqrt{f(\theta_1, \theta_2)}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta_1}(\theta_1, \theta_2), \\ \frac{\partial}{\partial \theta_2} [(\Delta d)^2] &= \frac{\partial}{\partial \theta_2} [(\sqrt{f(\theta_1, \theta_2)} - d)^2] = \frac{\sqrt{f(\theta_1, \theta_2)} - d}{\sqrt{f(\theta_1, \theta_2)}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \theta_2}(\theta_1, \theta_2). \end{aligned}$$

Videre gælder der, at

$$\frac{\partial f}{\partial \theta_1}(\theta_1, \theta_2) = -2l^2(-\sin(\theta_2 - \theta_1)) - 2dl \cos(\theta_1) = 2l(l \sin(\theta_2 - \theta_1) - d \cos(\theta_1)).$$

Da θ_1 indgår i tredje og femte led i (7), giver ovenstående beregninger os, at

$$\begin{aligned} \frac{dE_{\text{Lag}}}{d\theta_1} &= m_1gl(-\sin(\theta_1)) - \frac{1}{2}k \cdot \frac{\sqrt{f(\theta_1, \theta_2)} - d}{\sqrt{f(\theta_1, \theta_2)}} \cdot 2l(l \sin(\theta_2 - \theta_1) - d \cos(\theta_1)) \\ &= -m_1gl \sin(\theta_1) + kl(d \cos(\theta_1) - l \sin(\theta_2 - \theta_1)) \frac{\sqrt{f(\theta_1, \theta_2)} - d}{\sqrt{f(\theta_1, \theta_2)}}. \end{aligned}$$

Hvad angår $\dot{\theta}_1$, så indgår denne kun i første led i (7), hvorved man nemt ser, at

$$\begin{aligned} \frac{dE_{\text{Lag}}}{d\dot{\theta}_1} &= \frac{1}{2}m_1l^2 \cdot 2\dot{\theta}_1 = m_1l^2\dot{\theta}_1, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_{\text{Lag}}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= m_1l^2\ddot{\theta}_1. \end{aligned}$$

Dette betyder, at

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_{\text{Lag}}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{dE_{\text{Lag}}}{d\theta_1} = m_1 l^2 \ddot{\theta}_1 + m_1 g l \sin(\theta_1) - kl(d \cos(\theta_1) - l \sin(\theta_2 - \theta_1)) \frac{\sqrt{f(\theta_1, \theta_2)} - d}{\sqrt{f(\theta_1, \theta_2)}}.$$

Idet l indgår i alle led i denne ligning, bliver Euler-Lagranges ligning for θ_1 dermed

$$m_1 l \ddot{\theta}_1 + m_1 g \sin(\theta_1) - k(d \cos(\theta_1) - l \sin(\theta_2 - \theta_1)) \frac{\sqrt{f(\theta_1, \theta_2)} - d}{\sqrt{f(\theta_1, \theta_2)}} = 0. \quad (8)$$

Vi fortsætter så med θ_2 : Eftersom

$$\frac{\partial}{\partial \theta_2} \cos(\theta_2 - \theta_1) = -\frac{\partial}{\partial \theta_1} \cos(\theta_2 - \theta_1),$$

får man nemt af beregningerne for θ_1 , at

$$\frac{\partial f}{\partial \theta_2}(\theta_1, \theta_2) = -2l(l \sin(\theta_2 - \theta_1) - d \cos(\theta_2)).$$

Da θ_2 indgår i fjerde og femte led i (7), er

$$\begin{aligned} \frac{dE_{\text{Lag}}}{d\theta_2} &= m_2 g l (-\sin(\theta_2)) - \frac{1}{2} k \cdot \frac{\sqrt{f(\theta_1, \theta_2)} - d}{\sqrt{f(\theta_1, \theta_2)}} \left(-2l(l \sin(\theta_2 - \theta_1) - d \cos(\theta_2)) \right) \\ &= -m_2 g l \sin(\theta_2) + kl(l \sin(\theta_2 - \theta_1) - d \cos(\theta_2)) \frac{\sqrt{f(\theta_1, \theta_2)} - d}{\sqrt{f(\theta_1, \theta_2)}}. \end{aligned}$$

Hvad angår $\dot{\theta}_2$, så indgår denne kun i andet led i (7), hvilket giver følgende:

$$\begin{aligned} \frac{dE_{\text{Lag}}}{d\dot{\theta}_2} &= \frac{1}{2} m_2 l^2 \cdot 2\dot{\theta}_2 = m_2 l^2 \dot{\theta}_2, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_{\text{Lag}}}{\partial \dot{\theta}_2} \right) &= m_2 l^2 \ddot{\theta}_2. \end{aligned}$$

Det vil sige, at

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_{\text{Lag}}}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{dE_{\text{Lag}}}{d\theta_2} = m_2 l^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 g l \sin(\theta_2) - kl(l \sin(\theta_2 - \theta_1) - d \cos(\theta_2)) \frac{\sqrt{f(\theta_1, \theta_2)} - d}{\sqrt{f(\theta_1, \theta_2)}}.$$

Ligesom i den tilsvarende ligning for θ_1 , så indgår l også her i hvert led, så Euler-Lagrangeligningen for θ_2 bliver derfor

$$m_2 l \ddot{\theta}_2 + m_2 g \sin(\theta_2) - k(l \sin(\theta_2 - \theta_1) - d \cos(\theta_2)) \frac{\sqrt{f(\theta_1, \theta_2)} - d}{\sqrt{f(\theta_1, \theta_2)}} = 0. \quad (9)$$

Man ser, at denne ligning minder meget om (8), hvilket også virker ganske fornuftigt, den store symmetri taget i betragtning.

Approksimationer

Antag, at pendulerne kun udfører ganske små udsving, altså at $|\theta| \ll 1$, så kan vi bruge samme approksimationer som for de snorkoblede penduler, hvilket tillader os at forenkle (8) og (9) til

$$m_1 l \ddot{\theta}_1 + m_1 g \theta_1 + kl(\theta_1 - \theta_2) = 0,$$

$$m_2 l \ddot{\theta}_2 + m_2 g \theta_2 - kl(\theta_1 - \theta_2) = 0.$$

Altså er det betydeligt nemmere at beskrive systemet med disse ligninger, men man skal passe, at udsvingene – og dermed usikkerheden – ikke bliver for stor, hvilket nemt kan ske.

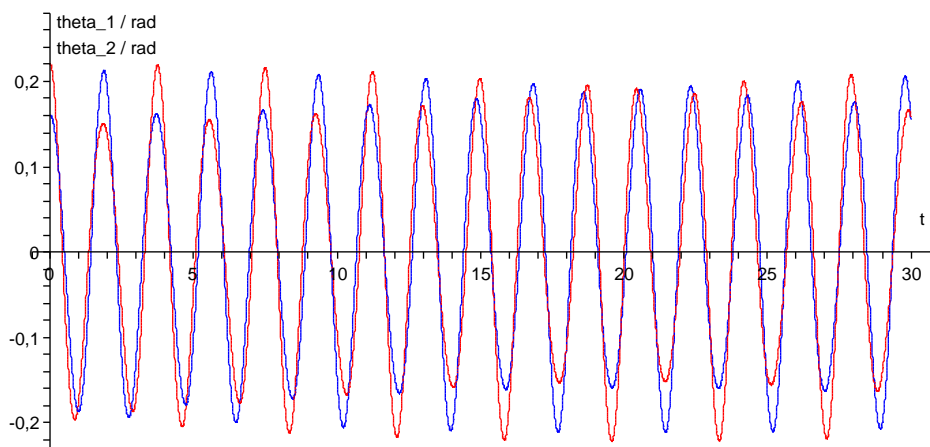
Grafisk repræsentation

De to ligninger (8) og (9) er såkaldte koblede differentialligninger, og for at kunne få noget brugbar information ud af dem, skal dette ligningssystem løses med hensyn til $\dot{\theta}_1$ og $\dot{\theta}_2$, hvorefter de fremkomne løsninger skal fremskrives numerisk efter følgende formler:

$$\dot{\theta}_{1,i+1} = \dot{\theta}_{1,i} + \ddot{\theta}_{1,i} \Delta t, \quad \theta_{1,i+1} = \theta_{1,i} + \dot{\theta}_{1,i} \Delta t,$$

$$\dot{\theta}_{2,i+1} = \dot{\theta}_{2,i} + \ddot{\theta}_{2,i} \Delta t, \quad \theta_{2,i+1} = \theta_{2,i} + \dot{\theta}_{2,i} \Delta t,$$

hvor $\ddot{\theta}_{1,i}$ og $\ddot{\theta}_{2,i}$ beregnes ud fra (8) og (9), med $\theta_1 = \theta_{1,i}$ og $\theta_2 = \theta_{2,i}$. Da løsningen til ligningssystemet, bestående af (8) og (9), er et stort og temmelig kompliceret udtryk, følger her nu blot et par grafer for pendulernes udsving som funktion af tiden:



FIGUR 5: Numerisk løsning af (8) og (9), med startbetingelserne $m_1 = 240$ g, $m_2 = 319$ g, $l = 86,0$ cm, $\theta_1(0) = 0,22$ rad og $\theta_2(0) = 0,16$ rad. Den røde graf er for $\theta_1(t)$ og den blå er for $\theta_2(t)$.

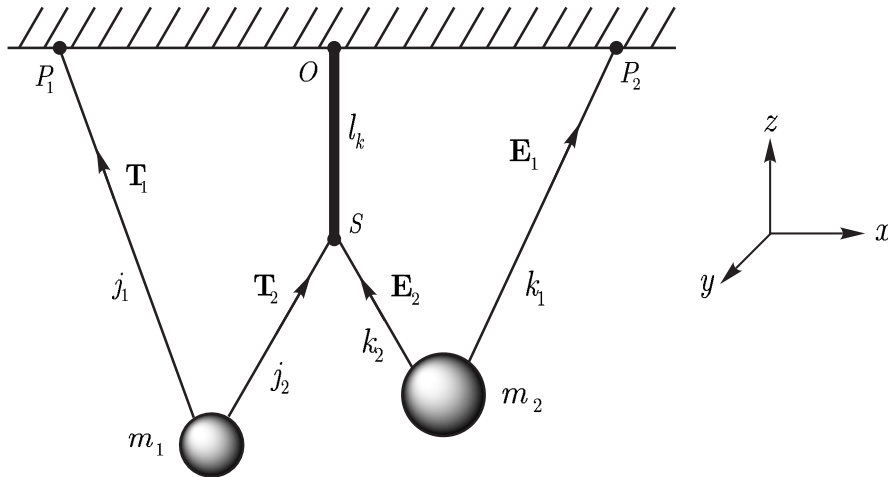
Tilsyneladende svinger pendulerne på FIGUR 4 kaotisk.

Stangkoblede penduler

Dette system vil vi beskrive anderledes end de tre andre; vi vil nemlig bruge kraftbetragtning til at finde en algoritme, hvormed man kan lave *rekursiv fremskrivning* af systems bevægelse.

Lad j_1 , j_2 , k_2 og k_1 betegne snorlængderne, og lad l_k være længden af stangen. Loddernes masser betegnes med m_1 henholdsvis m_2 , og snorkræfterne betegnes \mathbf{T}_1 , \mathbf{T}_2 , \mathbf{E}_2 og \mathbf{E}_1 , der vil have retning fra pendulet og mod ophængningspunktet; de to pendullodders positioner kaldes M_1 og M_2 . Antag, at der er tale om to matematiske penduler med stive og masseløse snore, der er ophængt i punkterne P_1 og P_2 , og stangen er ophængt i O , med punktet S som sammenkoblingspunkt mellem stangen og snorene med længderne j_2 og k_2 . Yderligere antages det, at tyngdeaccelerationen er konstant med værdien g , og at systemet er friktionsløst.

Bemærk, at $(\text{vektor})_x$ betegner vektorens x -koordinat, og altså ikke dens x -afledede.



FIGUR 6: Stangkoblede penduler, der svinger i (y, z) -planen.

Udledning af algoritme

I punktet S er $\sum \mathbf{F} = \mathbf{0}$, så S 's koordinater kan findes ud fra snorkræfterne \mathbf{T}_2 og \mathbf{E}_2 . Det centrale i dette er, at det er kræfternes numeriske størrelse, der afgør positionen af punktet S ud fra dets tidligere position, altså rekursivt, ved

$$\mathbf{S}_{ny} = \mathbf{O} - l_k(\mathbf{T}_2 + \mathbf{E}_2)^\wedge = \mathbf{O} - l_k(T_2(\mathbf{M}_1 - \mathbf{S})^\wedge + E_2(\mathbf{M}_2 + \mathbf{S})^\wedge). \quad (10)$$

Da vi ikke kan få \LaTeX til at lave „hatten“ bred nok, har vi benyttet notationen $(\text{vektor})^\wedge$ for en tværvektor. Videre har vi nu for M_1 , at

$$T_{1,y} + T_{2,y} = m_1 \ddot{M}_{1,y}, \quad (11)$$

$$T_{1,z} + T_{2,z} = m_1 g + m_1 \ddot{M}_{1,z}. \quad (12)$$

Ved betragtning af passende ensvinklede trekanter og fortegnsovervejelser, ses det, at følgende forkortelser vil være smarte:

$$a_1 := \frac{T_{1,z}}{T_{1,y}} = \frac{(\mathbf{P}_1 - \mathbf{M}_1)_z}{(\mathbf{P}_1 - \mathbf{M}_1)_y},$$

$$b_1 := \frac{T_{2,z}}{T_{2,y}} = \frac{(\mathbf{S} - \mathbf{M}_1)_z}{(\mathbf{S} - \mathbf{M}_1)_y},$$

$$a_2 := \frac{E_{1,z}}{E_{1,y}} = \frac{(\mathbf{P}_2 - \mathbf{M}_2)_z}{(\mathbf{P}_2 - \mathbf{M}_2)_y},$$

$$b_2 := \frac{E_{2,z}}{E_{2,y}} = \frac{(\mathbf{S} - \mathbf{M}_2)_z}{(\mathbf{S} - \mathbf{M}_2)_y}.$$

Ved brug af (11) og (12), fås dernæst følgende:

$$T_1 = \frac{j_1}{(\mathbf{P}_1 - \mathbf{M}_1)_z} \cdot \frac{m_1 g b_1 + m_1 \ddot{M}_{1,z} b_1 - m_1 \ddot{M}_{1,y}}{b_1 - a_1}, \quad (13)$$

$$T_2 = \frac{j_2}{(\mathbf{S} - \mathbf{M}_1)_z} \cdot \frac{m_1 g a_1 + m_1 \ddot{M}_{1,z} a_1 - m_1 \ddot{M}_{1,y}}{a_1 - b_1}, \quad (14)$$

$$E_1 = \frac{k_1}{(\mathbf{P}_2 - \mathbf{M}_2)_z} \cdot \frac{m_2 g b_2 + m_2 \ddot{M}_{2,z} b_2 - m_2 \ddot{M}_{2,y}}{b_2 - a_2}, \quad (15)$$

$$E_2 = \frac{k_2}{(\mathbf{S} - \mathbf{M}_2)_z} \cdot \frac{m_2 g a_2 + m_2 \ddot{M}_{2,z} a_2 - m_2 \ddot{M}_{2,y}}{a_2 - b_2}. \quad (16)$$

Nu til bestemmelsen af de nye snorlængder, hvis pars sum naturligvis er konstant:

$$j_{1,\text{ny}} = |\mathbf{P}_1 - \mathbf{M}_{1,\text{ny}}|,$$

$$j_{2,\text{ny}} = (j_1 + j_2) - j_{1,\text{ny}},$$

$$k_{1,\text{ny}} = |\mathbf{P}_2 - \mathbf{M}_{2,\text{ny}}|,$$

$$k_{2,\text{ny}} = (k_1 + k_2) - k_{1,\text{ny}}.$$

Dette var udtrykkene for S 's position og de fire snorspændinger, så for valgte startbetingelser, kan man nu gå i gang med selve fremskrivningsalgoritmen, der forløber som følger: Først finder vi de nye positioner af lodderne:

$$\mathbf{M}_{1,\text{ny}} = \mathbf{M}_1 + \dot{\mathbf{M}}_1 \Delta t,$$

$$\mathbf{M}_{2,\text{ny}} = \mathbf{M}_2 + \dot{\mathbf{M}}_2 \Delta t.$$

Vi fortsætter så med loddernes nye hastigheder:

$$\mathbf{v}_{1,\text{ny}} = \dot{\mathbf{M}}_{1,\text{ny}} = \dot{\mathbf{M}}_1 + \ddot{\mathbf{M}}_1 \Delta t,$$

$$\mathbf{v}_{2,\text{ny}} = \dot{\mathbf{M}}_{2,\text{ny}} = \dot{\mathbf{M}}_2 + \ddot{\mathbf{M}}_2 \Delta t.$$

Nu skal vi have bestemt accelerationerne i næste fremskrivningstrin:

$$\mathbf{a}_{1,\text{ny}} = \ddot{\mathbf{M}}_{1,\text{ny}} = \frac{\mathbf{T}_{1,\text{ny}} + \mathbf{T}_{2,\text{ny}} + m_1 \mathbf{g}}{m_1} = \frac{T_{1,\text{ny}}(\mathbf{P}_1 - \mathbf{M}_1)^\wedge + T_{2,\text{ny}}(\mathbf{S} - \mathbf{M}_1)^\wedge + (0, 0, -m_1 g)}{m_1},$$

$$\mathbf{a}_{2,\text{ny}} = \ddot{\mathbf{M}}_{2,\text{ny}} = \frac{\mathbf{E}_{1,\text{ny}} + \mathbf{E}_{2,\text{ny}} + m_2 \mathbf{g}}{m_2} = \frac{E_{1,\text{ny}}(\mathbf{P}_2 - \mathbf{M}_2)^\wedge + E_{2,\text{ny}}(\mathbf{S} - \mathbf{M}_2)^\wedge + (0, 0, -m_2 g)}{m_2}.$$

Find som det sidste \mathbf{S}_{ny} ud fra (10), og de fire snorkræfter ud fra (13)–(16), ved brug af de netop fundne snorlængder.

Hermed er det vist, hvordan man beskriver systemet til tiden Δt senere. Det er klart, at en eksakt beskrivelse fås for $\Delta t \rightarrow 0$, da tilstandene så er nøjagtigt beskrevet til enhver tid, $t \geq 0$.