Aflevering i uge 48

Opgave 131

Lad rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ være givet.

Spørgsmål (a)

Da udregningen af de første tre afsnitssummer i den givne række bare er regning ($\neq$ matematik), giver jeg blot resultatet:

$$s_1 = \frac{3}{4}, \quad s_2 = \frac{8}{9} \quad \text{og} \quad s_3 = \frac{15}{16}.$$

Spørgsmål (b)

Ved brug af induktionsaksiomet og Sætning 1.10 i [ETP][1], vil jeg nu vise, at udsagnet s_k,

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(k+1)^2}, \tag{1}$$

er sandt for alle $k \in \mathbb{N}$. Induktionsstarten er ganske triviel, idet

$$s_1 = \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{(1+1)^2}.$$

Nu til induktionsskridtet: Antag, at $s_p = 1 - (p+1)^{-2}$. Jeg viser så, at $s_p \Rightarrow s_{p+1}$:

$$\begin{aligned} s_{p+1} &= 1 - \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{2(p+1)+1}{(p+1)^2\big((p+1)+1\big)^2} = 1 - \frac{1(p+2)^2 - \big(2(p+1)+1\big)}{(p+1)^2\big((p+1)+1\big)^2} \\ &= 1 - \frac{p^2+4p+4-2p-3}{(p+1)^2\big((p+1)+1\big)^2} = 1 - \frac{(p+1)^2}{(p+1)^2\big((p+1)+1\big)^2} = 1 - \frac{1}{\big((p+1)+1\big)^2}. \end{aligned}$$

Hermed er $s_p \Rightarrow s_{p+1}$ bevist, og s_k er altså sand for alle $k \in \mathbb{N}$.

Spørgsmål (c)

Jeg vil nu vise, at summen af den givne række er $s_\infty = 1$. Da $\{1\}_{n=1}^{\infty}$ og $\{(1+k)^{-2}\}_{n=1}^{\infty}$ er kontinuerte, fås det af Sætning 4.6 i [ETP] og Spørgsmål (b), at

$$s_\infty = \lim_{k\to\infty}\left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \lim_{k\to\infty} 1 - \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = 1 - 0 = 1.$$

[1] Forkortelse for „Funktioner af en og flere variable“, af E. T. Poulsen.