

Aflevering i uge 47

Opgave 17

Ved brug af polære koordinater, vil jeg udlede et udtryk for voluminet af en kugle¹ med radius a . Først omskriver jeg kuglens ligning:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \Rightarrow z = \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}.$$

Lad $\mathcal{K} = \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \times [0, 2\pi]$. Jeg skal nu integrere over

$$\mathcal{D} = \{(r, \theta) \in \mathcal{K} \mid 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Da den øvre og den nedre halvkugle er symmetriske omkring (x, y) -planen, har jeg nu med $x^2 + y^2 = r^2$, at

$$\begin{aligned} V &= 2 \iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dA \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} r dr d\theta \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{3}(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^a d\theta \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} a^3 d\theta \\ &= \frac{2}{3} a^3 [\theta]_0^{2\pi} \\ &= \frac{4}{3} \pi a^3. \end{aligned}$$

¹ Det er hurtigere at beregne det som voluminet af et omdrejningslegeme, idet $V = \pi \int_0^\pi (a^2 - x^2) dx$ så bliver „serveret“ direkte.