Aflevering i uge 46

Opgave 42

Lad E betegne enhedscirklen i $\mathbb{C}$, det vil sige $E = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$, og lad mængderne A, B, C og D være defineret ved

$$\begin{aligned}
A &:= \{w \in \mathbb{C} \,|\, \exists z_1 \in E \,\exists z_2 \in E : w = z_1 + z_2\},\\
B &:= \{w \in \mathbb{C} \,|\, \forall z_1 \in E \,\forall z_2 \in E : w = z_1 + z_2\},\\
C &:= \{w \in \mathbb{C} \,|\, \exists z_1 \in E \,\forall z_2 \in E : w = z_1 + z_2\},\\
D &:= \{w \in \mathbb{C} \,|\, \forall z_1 \in E \,\exists z_2 \in E : w = z_1 + z_2\}.
\end{aligned}$$

Jeg vil nu give en beskrivelse af disse fire mængder.

Første mængde

Jeg vil vise, at A beskriver en cirkelskive med centrum i $(0,0)$ og radius 2. Altså at A ækvivalent med mængden

$$T = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leq 2\}. \tag{1}$$

$A \subseteq T$ vises ganske nemt, idet

$$x \in A \Rightarrow \exists z_1 \in E \,\exists z_2 \in E : x = z_1 + z_2 \Rightarrow |x| = |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| = 2 \Rightarrow x \in T.$$

For $T \subseteq A$ skal der til gengæld lidt flere beregninger til. Først fås dog, at

$$x \in T \Rightarrow |x| \leq 2 \Rightarrow \exists z_2 \in E : |x - z_2| = 1 \Rightarrow z_1 = x - z_2 \in E \Rightarrow x = z_1 + z_2 \Rightarrow x \in A.$$

Anden implikation er ikke helt indlysende: Idet $|x| \leq 2$, har jeg $x = r\big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\big)$, hvor $0 \leq r \leq 2$. Da $-1 \leq r \leq 1$, eksisterer der et a, så $\cos(\theta) = \frac{1}{2}r \Leftrightarrow 2\cos(\theta) = r$. Lad nu

$$z_2 = \cos(\theta + a) + i\sin(\theta + a).$$

Jeg mangler så blot at vise, at $|x - z_2| = 1$. Jeg får, at

$$\begin{aligned}
x - z_2 &= r\big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\big) - \big(\cos(\theta + a) + i\sin(\theta + a)\big)\\
&= 2\cos(\theta)\big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\big) - \big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\big)\big(\cos(a) + i\sin(a)\big)\\
&= \big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\big)\big(\cos(a) - i\sin(a)\big).
\end{aligned}$$

Altså er

$$|x - z_2| = |\cos(\theta) + i\sin(\theta)||\cos(a) - i\sin(a)| = 1 \cdot 1 = 1.$$

Da jeg nu har bevist, at $A \subseteq T$ og $T \subseteq A$, er $A = T$. $\square$

Tredje mængde

Det er med vilje, at jeg beskriver tredje mængde før anden mængde! Jeg vil vise, at C er lig den tomme mængde:

$$C = \emptyset. \tag{2}$$

Beviset herfor vil jeg føre ved en modstrid: Antag, at der eksisterer et element $x \in C$, så

$$x \in C \Rightarrow \exists z_1 \in E \forall z_2 \in E : x = z_1 + z_2.$$

Specielt har jeg, idet både -1 og 1 ligger på den komplekse enhedscirkel, at

$$z_1 - 1 = x = z_1 + 1 \Rightarrow -1 = 1.$$

Dette er en modstrid, så der eksisterer ingen elementer i C, og ergo er $C = \emptyset$. $\square$

Anden mængde

Ligesom for C, vil jeg vise, at

$$B = \emptyset. \tag{3}$$

Ved brug af udsagnet om C, finder jeg nu følgende:

$$x \in B \Rightarrow \forall z_1, z_2 \in E : x = z_1 + z_2.$$

Heraf har jeg specielt

$$\exists z_1 \in E \forall z_2 \in E : x = z_1 + z_2 \Rightarrow x \in C \Rightarrow B \subseteq C = \emptyset \Rightarrow B = \emptyset.$$

Nu er (3) bevist. $\square$

Fjerde mængde

Her viser jeg, at D består kun af nulelementet. Altså er D ækvivalent med mængden

$$N = \{0\}. \tag{4}$$

$D \subseteq N$ følger af, at

$$x \in D \Rightarrow \forall z_1 \in E \exists z_2 \in E : x = z_1 + z_2 \Rightarrow x - z_1 = z_2 \Rightarrow |x - z_1| = |z_2| = 1.$$

Altså har jeg $\forall z_2 \in E : x = z_1 + z_2$. Da afstanden fra x til z_1 skal være 1 for alle z_1 på E, må x nødvendigvis være centrum i E. Altså $x = 0 \in \{0\}$.

$N \subseteq D$:

$$x \in N \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \forall z_2 \in E : x = z_1 - z_1.$$

Lad nu $z_2 = -z_1$, så har jeg

$$\forall z_1 \in E \, \exists z_2 \in E : x = z_1 + z_2 \Rightarrow x \in D.$$

Dette var beskrivelsen af den sidste af de fire mængder. $\square$