Aflevering i uge 49

Opgave 152

Lad funktionerne $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ være kontinuerte, lad $c \in (a, b)$ og lad h være den ved

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{for} \quad a \leq x < c, \\ g(x) & \text{for} \quad c \leq x \leq b \end{cases}$$

definerede funktion på intervallet $[a, b]$.

Spørgsmål (a)

Lad $f(x) = \sin(x)$ og $g(x) = \cos(x)$ være givet. Jeg vil nu skitsere graferne for f, g og h på intervallet $[-\pi, \pi]$ for $c = 0$ henholdsvis $c = \pi/4$.

Da jeg stadig ikke har ordentlig styr på brugen af METAPOST, vedlægger jeg nogle håndtegnede skifter af de seks grafer, som kan ses på Bilag 1.

Spørgsmål (b)

Lad nu f og g være vilkårlige. Jeg vil så vise, at hvis $f(c) = g(c)$, så er h kontinuert.

Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Da både f og g er kontinuerte i c, har jeg nu, at

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta_1 > 0 \, \forall x \in [a, b] : |x - c| < \delta_1 \Longrightarrow |f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2},$$
$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta_2 > 0 \, \forall y \in [a, b] : |y - c| < \delta_2 \Longrightarrow |g(y) - g(c)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Lad yderligere $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, og betragt $x, y \in (a, b)$.[1] Da $f(c) = g(c)$, fås nu, at

$$\begin{aligned} |h(x) - h(y)| &= |f(x) - g(y)| = \big|\big(f(x) - f(c)\big) - \big(g(y) - g(c)\big)\big| \\ &\leq |f(x) - f(c)| + |g(y) - g(c)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Kontinuitet i $x = c$ er hermed bevist, men eftersom h jo er lig f eller g i alle andre punkter i $[a, b]$, er h kontinuert på hele intervallet. □

Spørgsmål (c)

Nu vil jeg vise, at hvis $f(c) \neq g(c)$, så er h diskontinuert.

Jeg skal altså vise, at

$$\exists \varepsilon > 0 \, \forall \delta > 0 \, \exists x \in [a, b] : \big(|x - c| < \delta \wedge |f(x) - f(c)| \geq \varepsilon\big).$$

Dette vil jeg vise ved en modstrid.

[1] Eneste interessant tilfælde er naturligvis, hvor jeg w.l.o.g. antager, at $c \in (x, y]$ og $|x - y| < \delta$.

Lad $\varepsilon > 0$ være givet ved

$$\varepsilon = \tfrac{1}{3}|f(c) - g(c)|,$$

og antag, at h er kontinuert i y for ethvert $\varepsilon > 0$. Jeg har nu, specielt for det valgte ε, at

$$|x - y| < \delta \Longrightarrow |h(x) - h(y)| < \varepsilon.$$

Analogt Spørgsmål (b), så nøjes jeg nu med at se på tilfældet $x, y \in [a, b]$, hvor $c \in (x, y)$ og $|x - y| < \delta$. Nu vælges δ „lille nok" til, at

$$\begin{aligned} |x - c| < \delta &\Longrightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon, \\ |y - c| < \delta &\Longrightarrow |g(y) - g(c)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Jeg har altså følgende:

$$|h(x) - h(y)| = |f(x) - g(y)| = \big|\big(g(c) - g(y)\big) - \big(g(c) - f(c)\big) - \big(f(c) - f(x)\big)\big|.$$

Af Sætning 3.23 i [ETP][2] og det faktum, at for ethvert reelt tal er $|x| \geq x$, fås følgende:

$$|a - b - c| \geq \big||a - b| - |c|\big| \geq |a - b| - |c| \geq \big||a| - |b|\big| - |c| \geq |a| - |b| - |c|.$$

Dette betyder altså, at jeg har

$$|h(x) - h(y)| \geq |g(c) - g(y)| - |g(c) - f(c)| - |f(c) - f(x)| > -\varepsilon - (-3\varepsilon) - \varepsilon = \varepsilon,$$

hvilket tydeligvis er en gang vrøvl, og modstriden er opnået. Ergo er h diskontinuert. $\square$

[2] Forkortelse for „Funktioner af en og flere variable", af E. T. Poulsen.