Aflevering i uge 37

Lad $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^2$ være den åbne delmængde, der er givet ved $\mathcal{O} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, og betragt vektorfeltet $X : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^2$, hvorom der gælder, at for $a, b \in \mathbb{R}_+$, er

$$X(x,y) = \left(a + \frac{b(y^2 - x^2)}{(x^2+y^2)^2}, \frac{-2bxy}{(x^2+y^2)^2}\right).$$

Del (a)

Vi vil først vise, at funktionen $F : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^2$, givet ved

$$F(x,y) = ax + \frac{bx}{x^2+y^2},$$

er en potentialfunktion for X.

Ifølge Definition 2.1 i [Bet], skal vi have bestemt gradientvektorfeltet. Da F er „opbygget af elementære funktioner“, giver Sætning 9.10 i [ETP] os, at de partielt afledede af F eksisterer for alle $(x,y) \in \mathcal{O}$, og af Sætning 9.6 i [ETP] fås så, at disse er givet ved

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = a + b \cdot \frac{1(x^2+y^2) - x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = a + \frac{b(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0 + bx \cdot \frac{0(x^2+y^2) - 1 \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2bxy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Dette viser, at $\nabla F(x,y) = X(x,y)$ på hele $\mathcal{O}$, så F er en potentialfunktion for X.

Del (b)

Nu viser vi, at X er ortogonal på enhver vektor $\mathbf{r}$ fra centrum af en cirkel med radius $\sqrt{b/a}$ til et vilkårligt punkt $(x,y) \in \mathcal{O}$ på cirklen.

Lad os beregne vektorproduktet af $\mathbf{r}$ og X, så lad $(x,y) \in \mathcal{O}$ med $x^2 + y^2 = b/a$ være givet. Der gælder nu, at

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(x,y) \cdot X(x,y) &= (x,y) \cdot \left(a + \frac{b(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, \frac{-2bxy}{(x^2+y^2)^2}\right) = ax + \frac{bx(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{-2bxy^2}{(x^2+y^2)^2} \\ &= ax + \frac{bxy^2 - bx^3 - 2bxy^2}{(x^2+y^2)^2} = ax + \frac{-bx(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \overset{(*)}{=} ax - \frac{bx}{b/a} = 0,\end{aligned}$$

hvor vi i $(*)$ bruger, at cirklen har radius $\sqrt{b/a}$, hvorved vi har relationen $x^2 + y^2 = b/a$. Da $\mathbf{r} \cdot X = 0$, er $X(x,y) \perp \mathbf{r}(x,y)$ for alle (x,y) på cirklen.

Del (c)

Til sidst vil vi vise, at $\mathcal{O} \ni (x,y) = \big(\pm\sqrt{b/a}, 0\big)$ er de eneste fikspunkter for X. Ifølge Definition 1.4 i [Bet], skal vi altså have vist eksistensen og entydigheden af $X\big(\pm\sqrt{b/a}, 0\big) = (0,0)$. Først verificeres eksistensudsagnet:

$$X\big(\pm\sqrt{b/a}, 0\big) = \left(a + \frac{b(0-b/a)}{(b/a+0)^2}, \frac{-2b(\pm\sqrt{b/a})0}{(b/a+0)^2}\right) = \left(a + b\cdot\frac{-1}{b/a}, \frac{0}{(b/a)^2}\right) = (0,0).$$

Nu skal vi så have vist, at dette er de eneste løsninger. Altså skal følgende ligningssystem løses med hensyn til (x,y):

$$a + \frac{b(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{-2bxy}{(x^2+y^2)^2} = 0. \tag{2}$$

Af (2) ses det, at enten er $x=0$ eller $y=0$. For $x=0$, har vi af (1), at

$$0 = a + \frac{b(y^2-0)}{(0+y^2)^2} = a + \frac{b}{y^2} \quad\Longrightarrow\quad a = -\frac{b}{y^2}.$$

Da $a,b>0$, er ovenstående klart en gang vrøvl. Altså må $y=0$, og af (1) har vi så, at

$$0 = a + \frac{b(0-x^2)}{(x^2+0)^2} = a - \frac{b}{x^2} \quad\Longrightarrow\quad x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Hermed er entydigheden bevist.

Litteratur

[ETP] Ebbe Thue Poulsen. *Indledning til matematisk analyse II*, 1. udgave, 2. oplag. Gads Forlag, København, Danmark 2002.

[Bet] David Betounes. *Differential Equations: Theory and Applications with Maple®*, 1. udgave. Springer-Verlag New York, New York, USA 2002.