Aflevering i uge 18

Opgave 8.2.16

Betragt den kvadratiske flade med ligningen

$$3x^2 + 2y^2 + 6xz + 3z^2 = 1. \tag{1}$$

Den symmetriske koefficientmatrix for (1) er

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dette giver mig, at

$$\begin{aligned} \det(\mathsf{A} - \lambda \mathsf{I}) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda)\big((2-\lambda)(3-\lambda) - 0\cdot 0\big) - 0\big(0(3-\lambda) - 3\cdot 0\big) + 3\big(0\cdot 0 - 3(2-\lambda)\big) \\ &= (3-\lambda)^2(2-\lambda) - 9(2-\lambda) \\ &= \big(9 - 6\lambda + \lambda^2 - 9\big)(2-\lambda) \\ &= \lambda(\lambda-6)(2-\lambda) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Egenværdierne for A ses hermed at være 6, 2 og 0, og Tabel 8.1 i [BF][1] giver mig så, at (1) enten er ligningen for en elliptisk cylinder eller en elliptisk paraboloide.

Egenvektorerne hørende til egenværdierne, finder man ved at løse de tilhørende homogene, lineære ligningssystemer:[2]

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 6: &\quad \mathbf{v}_1 = (1,0,1), &\quad \|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{2}, \\ \lambda_2 = 2: &\quad \mathbf{v}_2 = (0,1,0), &\quad \|\mathbf{v}_2\| = 1, \\ \lambda_3 = 0: &\quad \mathbf{v}_3 = (-1,0,1), &\quad \|\mathbf{v}_3\| = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Dette giver mig følgende ortogonale diagonaliseringsmatrix for A:

$$\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

[1] Forkortelse for „Linear Algebra“, 3. udgave, af R. A. Beauregard og J. B. Fraleigh.

[2] Dette er nogle trælse og trivielle beregninger, som jeg vil „skåne“ dig for.

Det kan let verificeres, at $\det(\mathsf{C}) = 1$. Nu giver Sætning 8.1 i [BF] mig så, at den diagonaliserede form af (1) er givet ved

$$\lambda_1 t_1^2 + \lambda_2 t_2^2 + \lambda_3 t_3^2 = 1 \implies 6t_1^2 + 2t_2^2 + 0t_3 = 1 \implies \frac{t_1^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2} + \frac{t_2^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1.$$

Heraf ses det, at (1) er ligningen for *en elliptisk cylinder*.

Opgave 8.2.20

Betragt den kvadratiske flade med ligningen

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz = 9. \tag{2}$$

Eftersom det kræver endog nogle beregninger at kunne diagonalisere en kvadratisk flade, vil jeg løse denne opgave ganske hurtigt, ved først at omskrive (2) som følger:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz = 9 \implies z^2 + 2(x-y)z + (x-y)^2 - 9 = 0.$$

Heraf fås så, at

$$\begin{aligned} z &= \frac{-2(x-y) \pm \sqrt{4(x-y)^2 - 4\big((x-y)^2 - 9\big)}}{2} \\ &= y - x \pm \sqrt{(x-y)^2 - (x-y)^2 + 9} \\ &= y - x \pm 3. \end{aligned}$$

Dette er to ligninger på formen

$$ax + by + cz + d = 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

så (2) beskriver altså *to parallelle planer* i $\mathbb{R}^3$ med en indbyrdes afstand langs akserne på $|-3| + |3| = 6$.