Indhold

Forord

På de følgende sider, giver jeg mit bud på en besvarelse af eksamenssættet i kurset Matematik 11 – det senere Matematisk analyse 1+2 – fra sommeren 2002. Opgaveformuleringen er at finde på Klaus Thomsens hjemmeside, via adressen `http://home.imf.au.dk/matkt/notedir/opg02.pdf`.

Jeg har efter bedste evne forsøgt at referere til bøgerne i litteraturlisten på side 11. Til eksamen er der formodentlig ikke tid nok til at give lige så mange referencer, som jeg har gjort det her, så forhåbentlig vil denne besvarelse hjælpe med til, at man bedre kan huske sætningsreferencerne, når man sidder og sveder til eksamenen.

Århus, maj 2005
Mads Sørensen

Eksamensopgaver

2002-sættet

Opgave 1

Spørgsmål (a)

Eftersom

$$(2i)^2 - 5i(2i) - 6 = 4(-1) - 10(-1) - 6 = 0,$$

$$(3i)^2 - 5i(3i) - 6 = 9(-1) - 15(-1) - 6 = 0,$$

er $2i$ og $3i$ løsninger til ligningen

$$z^2 - 5iz - 6 = 0.$$

Idet $2i \neq 3i$, giver Sætning 5.3.2 i [1] mig nu, at differentialligningen

$$u''(t) - 5iu'(t) - 6u(t) = 0 \tag{1}$$

har den fuldstændige løsning

$$u(t) = C_1 e^{2it} + C_2 e^{3it},$$

hvor $C_1, C_2 \in \mathbb{C} \supseteq \mathbb{R}$.

Spørgsmål (b)

Højresiden af (1) er af samme type som ligning (5.23) i [1]; $f(t) = 2e^{it}$ med $\gamma_1 = i$, $n_1 = 1$ og $s = 1$. Da γ_1 ikke er løsning til (1), „gætter“ jeg nu på, at

$$u_0(t) = Ke^{it}$$

er en partikulær løsning til differentialligningen

$$u''(t) - 5iu'(t) - 6u(t) = 2e^{it}. \tag{2}$$

Ved indsættelse i (2) finder man følgende:

$$u_0''(t) - 5iu_0'(t) - 6u_0(t) = -Ke^{it} - 5i\left(iKe^{it}\right) - 6Ke^{it} = -2Ke^{it},$$

som skal være lig $2e^{it}$. Heraf ses nemt, at $K = -1$. De reelle konstanter, der med $u_0(t) = ae^{ibt}$ er løsning til (2), er altså $a = -1$ og $b = 1$.

Spørgsmål (c)

Sætning 5.3.5 i [1] giver mig, at den fuldstændige løsning til (2) er på formen

$$u(t) = C_1 e^{2it} + C_2 e^{3it} - e^{it}, \tag{3}$$

hvor $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$. Jeg vil også finde den løsning, v, til (2), der opfylder, at $v(0) = -1$ og $v'(0) = i$. Den første betingelse giver mig følgende:

$$C_1 e^{2i\cdot 0} + C_2 e^{3i\cdot 0} - e^{i\cdot 0} = -1 \implies C_1 + C_2 - 1 = -1 \implies C_1 = -C_2.$$

Jeg differentierer dernæst (3):

$$u'(t) = 2iC_1 e^{2it} + 3iC_2 e^{3it} - ie^{it}.$$

Af anden betingelse fås så, at

$$\begin{aligned}
&2iC_1 e^{2i\cdot 0} + 3iC_2 e^{3i\cdot 0} - ie^{i\cdot 0} = i \implies 2iC_1 + 3iC_2 - i = i \implies \\
&2C_1 + 3C_2 = 2 \implies C_1 = 1 - \tfrac{3}{2}C_2 = 1 + \tfrac{3}{2}C_1.
\end{aligned}$$

Løsningen til denne ligning ses nemt at være $C_1 = -2$, og dermed er $C_2 = 2$. Altså er

$$v(t) = -e^{it} - 2e^{2it} + 2e^{3it}. \tag{4}$$

Spørgsmål (d)

Idet $v(t)$ klart er stykkevis kontinuert og begrænset på $[-\pi, \pi]$, giver Lemma 4.1.1 og Definition 4.1.4 i [1] mig, at for ethvert $n \in \mathbb{Z} \setminus \{1, 2, 3\}$, er Fourierkoefficienterne for Fourierrækken for v givet ved

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(-e^{it} - 2e^{2it} + 2e^{3it}\right) e^{-int}\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(-\int_{-\pi}^{\pi} e^{1it} e^{-int} dt \; - 2 \int_{-\pi}^{\pi} e^{2it} e^{-int}\, dt + 2 \int_{-\pi}^{\pi} e^{3it} e^{-int}\, dt \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} (-0 - 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Yderligere har jeg, at

$$\begin{aligned}
c_1 &= \tfrac{1}{2\pi}(-2\pi - 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0) = -1, \\
c_2 &= \tfrac{1}{2\pi}(-0 - 2 \cdot 2\pi + 2 \cdot 0) = -2, \\
c_3 &= \tfrac{1}{2\pi}(-0 - 2 \cdot 0 + 2 \cdot 2\pi) = 2.
\end{aligned}$$

Ifølge ligning (4.15) i [1], er Fourierrækken for v så givet ved

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int} = -e^{it} - 2e^{2it} + 2e^{3it} = v(t).$$

Da v oplagt er stykkevis kontinuert og begrænset på $[-\pi, \pi]$, giver Parsevals identitet (Sætning 4.3.5 i [1]) mig videre, at

$$\int_{-\pi}^{\pi} |v(t)|^2 \, dt = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 = 2\pi\big(|-1|^2 + |-2|^2 + |2|^2\big) = 18\pi.$$

Opgave 2

Spørgsmål (a)

Det oplyses, at $\alpha \in \mathbb{R}$ og at et vektorfelt $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er givet ved

$$F(x, y) = \big(f_1(x, y), f_2(x, y)\big) = \big(xy\cos(xy) + \sin(xy) + \alpha y, x^2\cos(xy)\big).$$

Da det skal vises, at F er konservativt, hvis – og kun hvis – $\alpha = 0$, starter jeg med at finde de partielt afledede af F, der ifølge Sætning 9.14 og 9.6 i [2] eksisterer for ethvert $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ og er givet ved

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) &= x\cos(xy) + xy(-\sin(xy))x + \cos(xy)x + \alpha \\
&= 2x\cos(xy) - x^2y\sin(xy) + \alpha, \\
\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) &= 2x\cos(xy) + x^2(-\sin(xy))y \\
&= 2x\cos(xy) - x^2y\sin(xy).
\end{aligned}$$

Sætning 1.3.4 i [1] giver mig nu, da $\mathbb{R}^2$ klart er stjerneformet, at hvis F er rotationsfrit, så er det også konservativt. Sætning 1.3.1 i [1] giver så, at F er konservativt, såfremt

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y),$$

hvilket tydeligvis kun er opfyldt for $\alpha = 0$. Dette var netop hvad der skulle vises.

Spørgsmål (b)

Det antages nu, at $\alpha = 0$ og $\beta \in \mathbb{R}$. Jeg vil nu vise, at funktionen $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, givet ved

$$\varphi(x, y) = \beta x \sin(xy),$$

er en stamfunktion til F, hvis – og kun hvis – $\beta = 1$. Fra Spørgsmål (a) ved jeg at F er rotationsfrit (det er jo konservativt), hvilket giver mig, at en stamfunktion eksisterer. Nu finder jeg de partielt afledede af φ, igen ved brug af Sætning 9.14 og 9.6 i [2]:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = \beta\big(1\sin(xy) + x\cos(xy)y\big) = \beta\big(xy\cos(xy) + \sin(xy)\big);$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = \beta x\cos(xy)x = \beta x^2\cos(xy).$$

Hermed er der gjort rede for, at $\nabla\varphi$ eksisterer, og den er givet ved

$$\begin{aligned}\nabla\varphi(x,y) &= \big(\beta\big(xy\cos(xy)+\sin(xy)\big), \beta x^2\cos(xy)\big)\\ &= \beta\left(xy\cos(xy)+\sin(xy), x^2\cos(xy)\right)\\ &= \beta F(x,y).\end{aligned}\tag{5}$$

Sætning 1.3.4 i [1] giver mig videre, at hvis φ skal være en stamfunktion til F, så skal

$$\nabla\varphi(x,y) = F(x,y),$$

og ifølge (5), så er dette kun tilfældet for $\beta = 1$.

Spørgsmål (c)

Af forrige spørgsmål og Lemma 8.17 i [2] følger det nu trivielt, at for $C \in \mathbb{R}$, er samtlige stamfunktioner til F givet ved

$$x\sin(xy) + C.$$

Spørgsmål (d)

Lad $\gamma : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2$ være kurven

$$\gamma(t) = \big(-\sqrt{\pi}\sin(t), \sqrt{\pi}+\sqrt{\pi}\cos(t)\big) = \sqrt{\pi}\big(-\sin(t), 1+\cos(t)\big).$$

Jeg vil nu bestemme værdien af kurveintegralet $\int_\gamma F$. Da $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ er kurvesammenhængende, har jeg af første del af beviset for Sætning 1.3.11 (side 40, midt) i [1], at

$$\begin{aligned}\int_\gamma F &= \varphi\left(\gamma\big(\tfrac{\pi}{2}\big)\right) - \varphi\big(\gamma(0)\big)\\ &= \varphi\Big(\sqrt{\pi}\left(-\sin\big(\tfrac{\pi}{2}\big), 1+\cos\big(\tfrac{\pi}{2}\big)\right)\Big) - \varphi\Big(\sqrt{\pi}\big(-\sin(0), 1+\cos(0)\big)\Big)\\ &= \varphi\left(-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}\right) - \varphi\left(0, 2\sqrt{\pi}\right)\\ &= -\sqrt{\pi}\sin\big(-\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}\big) - 0\sin\big(0\cdot 2\sqrt{\pi}\big)\\ &= -\sqrt{\pi}\cdot 0 - 0\\ &= 0.\end{aligned}$$

Spørgsmål (e)

Ud fra forskriften for γ ses det, at kurven beskriver en kvartcirkel i 2. kvadrant med radius $\sqrt{\pi}$, så længden må være $2\pi\sqrt{\pi}/4 = \frac{1}{2}\pi^{3/2}$, men lad os regne efter alligevel. Først differentierer jeg $\gamma(t)$, og finder dernæst normen af differentialkvotienten:

$$\gamma'(t) = \sqrt{\pi}\big(-\cos(t), -\sin(t)\big) = -\sqrt{\pi}\big(\cos(t), \sin(t)\big), \qquad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{\pi}.$$

Da $\gamma \in \mathcal{C}^1([0,\pi/2])$, giver Korollar 1.3.7 i [1] mig, at længden af γ er

$$\ell_\gamma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \|\gamma'(t)\|\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\pi}\,dt = \tfrac{1}{2}\pi^{3/2}.$$

Opgave 3

Spørgsmål (a)

Betragt rektanglet

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \tfrac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, 1 \leq y \leq 2\right\},$$

og lad funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ været givet ved

$$f(x,y) = x\cos(xy).$$

Sætning 5.4 (b), 5.5 (d) og 5.9 i [2] giver mig nu, at Id_R, $(x,y) \mapsto xy$ og $(x,y) \mapsto \cos(xy)$ alle er kontinuerte på R, og så har jeg af Sætning 5.11 i [2], at f er kontinuert på R. Nu giver Sætning 8.9 i [2], at f er integrabel over R. Ved brug af Sætning 10.9 i [2], fås så

$$\begin{aligned}
\int_R dA &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_1^2 x\cos(xy)\,dy\,dx \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \big[\sin(xy)\big]_1^2\,dx \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(2x)\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin(x)\,dx \\
&= -\tfrac{1}{2}\big(\cos(2\pi) - \cos(\pi)\big) + \big(\cos(\pi) - \cos\big(\tfrac{\pi}{2}\big)\big) \\
&= -\tfrac{1}{2}(1-(-1)) + (-1-0) \\
&= -2.
\end{aligned}$$

Spørgsmål (b)

Ved indsættelse ses, at $f\big(1, \frac{\pi}{2}\big) = 0$. Sætning 9.14 og 9.6 i [2] giver mig så, at følgende differentialkvotienter eksisterer og er kontinuerte på hele $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1\cos(xy) + x\big(-\sin(xy)\big)y = \cos(xy) - xy\sin(xy);$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\big(-\sin(xy)\big)x = -x^2\sin(xy),$$

Altså er

$$\frac{\partial f}{\partial x}\big(1, \tfrac{\pi}{2}\big) = \cos\big(1\cdot\tfrac{\pi}{2}\big) - 1\cdot\tfrac{\pi}{2}\sin\big(1\cdot\tfrac{\pi}{2}\big) = -\tfrac{\pi}{2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\big(1, \tfrac{\pi}{2}\big) = -1^2\sin\big(1\cdot\tfrac{\pi}{2}\big) = -1 \neq 0.$$

Nu giver Sætning 1.2.1 i [1] mig, at der findes et $\varepsilon > 0$ og en kontinuert differentiabel funktion, $h : (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \to \mathbb{R}$, som opfylder, at for ethvert $x \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$, er

$$x\cos\big(xh(x)\big) = 0.$$

Yderligere giver Sætning 1.2.1 i [1] mig, at $h(1) = \frac{\pi}{2}$ og

$$h'(1) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(1, \frac{\pi}{2})}{\frac{\partial f}{\partial y}(1, \frac{\pi}{2})} = -\frac{-\frac{\pi}{2}}{-1} = -\frac{\pi}{2}.$$

Spørgsmål (c)

Lad $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være defineret ved

$$g(x) := \int_0^1 t \cos(xt)\, dt.$$

Ved at bruge Leibniz' regel (Sætning 1.3.3 i [1]) fire gange på $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, hvor $(x, t) \mapsto t\cos(xt)$, ses det, at g er tre gange kontinuert differentiabel (Jævnfør Sætning 7.5 i [2]).[1] Idet der ses bort fra eventuelle integrationskonstanter, og det antages at $x \neq 0$, har vi

$$\begin{aligned}
\int t\cos(xt)\, dt &= t \int \cos(xt)\, dt - \int \left(\frac{dt}{dt} \int \cos(xt)\, dt \right) dt \\
&= t \cdot \frac{\sin(xt)}{x} - \int \frac{\sin(xt)}{x} \cdot 1\, dt \\
&= \frac{t \sin(xt)}{x} - \frac{1}{x} \left(-\frac{\cos(xt)}{x} \right) \\
&= \frac{xt \sin(xt) + \cos(xt)}{x^2}.
\end{aligned}$$

For $x \neq 0$ finder man videre, at hvis man integrerer fra 0 til 1, ender man med

$$\frac{x\sin(x) + \cos(x) - 1}{x^2}.$$

For $x = 0$ beregnes integralet, der definerer g, nemt til $1/2$, så

$$g(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{for } x = 0, \\ \big(x\sin(x) + \cos(x) - 1\big)x^{-2} & \text{ellers.} \end{cases} \tag{6}$$

Eftersom $g \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$, eksisterer Taylorpolynomiet af 3. grad omkring 0, og Sætning 7.2 (a) i [2] og (6) giver mig så, at $g^{(k)}(0) = 0$ for ethvert $k \in \mathbb{N}$. Af Definition 2.1.2 i [1] fås så til sidst, at

$$T_3 g(0) = \sum_{k=0}^{3} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k = g(0) = \frac{1}{2}.$$

[1] Det ses endda nemt, at g er glat, og på bilaget på side 11, kan man se eksplicitte udtryk for $g^{(n)}(x)$, for $x \neq 0$ og ethvert $n \in \mathbb{N}$.

Spørgsmål (d)

Lad $x \in \mathbb{R}$ og $n \in \mathbb{N}$ være givet, og lad $b \in \mathbb{R}$ være vilkårlig, men fastholdt. Det oplyses, at

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \;\; \forall\, x \in \mathbb{R} \,:\, \left|g^{(n)}(x)\right| \leq \frac{1}{n+1}.$$

Specielt gælder der så, at grænseværdierne

$$\lim_{n\to\infty} \left|g^{(n+1)}(x)\right| \quad \text{og} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)+1}$$

eksisterer, og der gælder ifølge Sætning 4.4 i [2] nu følgende:

$$\lim_{n\to\infty} \left|g^{(n+1)}(x)\right| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)+1} = 0. \tag{7}$$

Da $|y| \geq 0$ for ethvert $y \in \mathbb{R}$, giver (7) mig nu, at $\lim\limits_{n\to\infty} \left|g^{(n+1)}(x)\right| = 0$.

Taylors sætning giver mig så, at hvis $R_n g(b)$ betegner restleddet af Taylorrækken for g, der udvikles omkring b, så eksisterer der et $\xi \in (b, x)$, således at

$$\lim_{n\to\infty} R_n g(x) = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-b)^{n+1}\right].$$

Lad $d_n \coloneqq \left|(x-b)^{n+1}\right|/(n+1)!$. Man bemærker, at $\forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\} : a_n > 0$, så udtrykket

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{\dfrac{\left|(x-b)^{n+2}\right|}{(n+2)!}}{\dfrac{\left|(x-b)^{n+1}\right|}{(n+1)!}} = \frac{\left|(x-b)^{n+2}\right|}{\left|(x-b)^{n+1}\right|} \frac{(n+1)!}{(n+2)!} = \left|x-b\right|(n+2)^{-1} \equiv p_n$$

er meningsfyldt. Da både $\lim\limits_{n\to\infty} \left|x-b\right|$ og $\lim\limits_{n\to\infty} (n+2)^{-1}$ eksisterer, eksisterer også $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$, og der gælder følgende:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left|x-b\right|(n+2)^{-1}\right) = \lim_{n\to\infty} \left|x-b\right| \cdot \lim_{n\to\infty} (n+2)^{-1} = \left|x-b\right| 0 = 0.$$

Altså eksisterer også $\lim\limits_{n\to\infty} d_{n+1}/d_n$, og denne grænseværdi har værdien $0 < 1$. Kvotientkriteriet (Sætning 4.38 i [2]) giver mig nu, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ er konvergent. Videre har jeg nu af Sætning 4.34 i [2], at $\lim\limits_{n\to\infty} d_n$ eksisterer og er lig 0. Specielt gælder der så, at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(x-b)^{n+1}}{(n+1)!}$$

eksisterer og er konvergent med værdien 0. Dette betyder, at

$$\lim_{n\to\infty} R_n g(x) = \lim_{n\to\infty} g^{(n+1)}(\xi) \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(x-b)^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \cdot 0 = 0.$$

Andet lighedstegn følger af, at Sætning 6.35 i [2] også gælder, når b erstattes af ∞. Da $g(b) = T_n g(b) + R_n g(b)$, er

$$\lim_{n\to\infty} T_n g(x) = g(b).$$

Opgave 4

Spørgsmål (a)

Lad $a_n \coloneqq \log(n)n^{-1}$ for ethvert $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$, og betragt dernæst potensrækken

$$\sum_{n=3}^{\infty} a_n z^n. \tag{8}$$

Man bemærker, at $\forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\} : a_n > 0$ (specielt er så $a_n \neq 0$), så videre fås følgende:

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{\left|\dfrac{\log(n)}{n}\right|}{\left|\dfrac{\log(n+1)}{n+1}\right|} = \frac{n+1}{n}\frac{\log(n)}{\log(n+1)} = \left(1 + n^{-1}\right)\frac{\log(n)}{\log(n+1)} \equiv k_n.$$

Lad dernæst $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ være givet ved $x \mapsto \log(x)/\log(x+1)$. Definer så yderligere to funktioner $h_1, h_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ved

$$h_1(x) = \log(x) \quad \text{og} \quad h_2(x) = \log(x+1).$$

Sætning 7.2 (h) i [2] giver mig, at både h_1 og h_2 er differentiable i det indre af deres definitionsmængde, og

$$\frac{dh_1}{dx}(x) = x^{-1} \quad \text{og} \quad \frac{dh_1}{dx}(x) = (x+1)^{-1}.$$

Nu giver l'Hôpitals regel om $0/0$-udtryk, når $x \to \infty$ (Sætning 7.22 i [2]), at idet

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{dh_1}{dx}(x)}{\dfrac{dh_2}{dx}(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{-1}}{(x+1)^{-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty} x^{-1} = 1 + 0 = 1$$

eksisterer, så eksisterer også $\lim\limits_{x\to\infty} h(x)$, og

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{dh_1}{dx}(x)}{\dfrac{dh_2}{dx}(x)} = 1.$$

Sætning 4.4 og 4.6 (c) og (d) i [2] giver mig så, at da enhver faktor i følgen $\{k_n\}_{n=3}^{\infty}$ er konvergent for $n \to \infty$, er

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + n^{-1}\right)\frac{\log(n)}{\log(n+1)}\right] = \left(\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} n^{-1}\right) \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n)}{\log(n+1)} = (1+0)\cdot 1 = 1.$$

Dette betyder, at også $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ eksisterer, og så giver Sætning 3.2.5 i [1] mig nu, med $N = 3$, at konvergensradiusen for (8) er lig med

$$R_f = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + n^{-1}\right)\frac{\log(n)}{\log(n+1)}\right] = 1.$$

Bemærkning. I Sætning 3.2.5 i [1] betragtes rækker på formen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, men fordi der summes fra $n = 3$, ændrer det naturligvis ikke på gyldigheden af sætningen.

Spørgsmål (b)

Betragt en funktion $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$. Da D_f netop er lig det indre af konvergenscirklen for (8), betyder det, at jeg kan bruge Sætning 3.2.15 i [1] – igen med den „ubetydelige" forskel, at der også her summes fra $n = 3$ – til at integrere (8) ledvist. Med $C \in \mathbb{R}$ fås, at

$$\int \left(\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\log(n)}{n} t^n \right) dt = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\log(n)}{n} \int t^n \, dt = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\log(n)}{n(n+1)} t^{n+1} + C, \tag{9}$$

for ethvert $t \in (-1, 1)$. Videre har jeg, at

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\log(n)}{n} 0^n = 0.$$

Dette giver mig, at der findes netop én funktion $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, der opfylder, at

$$f(0) = 0 \quad \text{og} \quad f'(t) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\log(n)}{n} t^n.$$

Yderligere giver (9) mig så, at for ethvert $t \in (-1, 1)$, er denne funktion givet ved

$$f(t) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\log(n)}{n(n+1)} t^{n+1}.$$

Spørgsmål (c)

Lad a_n være givet som i Spørgsmål (a), og betragt rækken

$$\sum_{n=3}^{\infty} a_n. \tag{10}$$

Da $\log(3) > 1$ og $\log(n)$ er voksende for ethvert $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$, gælder følgende:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\} \ : \ a_n \geq n^{-1}.$$

Sætning 4.40 i [2] giver mig, at for $p = 1 \leq 1$ gælder der, at $\sum_{n=3}^{\infty} n^{-1}$ er divergent. Af Sammenligningskriteriet (Sætning 4.36 i [2]) følger det så – med $c = 0 < 1$ –, at også (10) divergerer.

Lad nu for nemheds skyld $b_{kn} := (1 - k^{-1})^n$ og betragt rækken

$$\sum_{n=3}^{\infty} a_n b_{kn}. \tag{11}$$

Resten af dette spørgsmål vil jeg klare som følger: Lad $M > 0$ være givet, og vælg et $N \in \mathbb{N}$, således at

$$\sum_{n=3}^{N} a_n > 2M.$$

For et vilkårligt, men fastholdt, $k \in \mathbb{N}$, ses følgende ulighed klart at være opfyldt:

$$\sum_{n=3}^{\infty} a_n b_{kn} = \sum_{n=3}^{N} a_n b_{kn} + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n b_{kn} > \sum_{n=3}^{N} a_n b_{kn} > b_{kn} \sum_{n=3}^{N} a_n > b_{kn} \cdot 2M.$$

Vælg nu $K \in \mathbb{N}$ tilstrækkelig stort til, at $2b_{kn} \geq 1$, for $k \geq K$. Heraf kan jeg nu slutte, at

$$\forall\, M > 0 \;\; \exists\, K \in \mathbb{N} \;:\; k \geq K \implies \sum_{n=3}^{\infty} a_n b_{kn} > M.$$

Dette er som bekendt det samme som at (11) har værdien ∞, og dermed er ubegrænset.

Spørgsmål (d)

Dette spørgsmål besvares ved en modstrid. Lad igen a_n være givet som i Spørgsmål (a), og antag dernæst, at $h : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ faktisk er en kontinuert funktion med forskriften

$$h(t) = \sum_{n=3}^{\infty} a_n t^n, \tag{12}$$

for samtlige $t \in (-1, 1)$. Eftersom h er kontinuert, giver dette og forrige spørgsmål mig, at $\lim_{t \to 1^-} h(t) = \infty$, hvorved h ses at være ubegrænset.

Da der som bekendt gælder, at en kontinuert funktion, der er defineret på et lukket interval[2], er begrænset, er det en gang vrøvl at snakke om at h er kontinuert. Ergo eksisterer der ingen kontinuert funktion $h : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, der opfylder (12).

[2] Det kan uden det store besvær udvides til at omfatte en generel kompakt mængde.

Bilag

Ved brug af induktion og Sætning 1.10 i [2], kan det vises, at for $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, hvor

$$g(x) \coloneqq \int_0^1 t\cos(xt)\,dt = \frac{x\sin(x)+\cos(x)-1}{x^2},$$

gælder der for ethvert $n \in \mathbb{N}$, at $g^{(n)}(x)$ eksisterer og er givet ved

$$\frac{d^{2n-1}g}{dx^{2n-1}}(x) = (2n)!\,\frac{\cos(x)\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!}x^{2k} + \sin(x)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!}x^{2k+1} + 1}{x^{2n+1}},$$

$$\frac{d^{2n}g}{dx^{2n}}(x) = (2n+1)!\,\frac{\cos(x)\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k}}{(2k)!}x^{2k} + \sin(x)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{k}}{(2k+1)!}x^{2k+1} - 1}{x^{2n+2}}.$$

Litteratur

[1] Henrik Stetkær, Klaus Thomsen og Christina Tønnesen-Friedman. *Indledning til matematisk analyse II*, 1. udgave. Aarhus Universitet, Århus, Danmark 2002.

[2] Ebbe Thue Poulsen. *Funktioner af en og flere variable. Indledning til matematisk analyse*, 1. udgave, 2. oplag. Gads Forlag, København, Danmark 2002.