Aflevering i uge 45

Opgave 15

Proposition. *Udsagnet s_n, givet ved*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}, \tag{1}$$

er sandt for alle $n \in N$.

Bevis. Induktionsstarten med $n = 1$ er tydeligvis sand, eftersom

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} \leq 2 - \frac{1}{1}.$$

Nu til induktionsskridtet: Antag, at udsagnet s_p, hvor

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{p},$$

er sandt. Jeg skal så vise, at $s_p \Rightarrow s_{p+1}$:

$$\sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{p} + \frac{1}{(p+1)^2} = 2 - \frac{p^2 + 2p + 1 - p}{p(p+1)^2} < 2 - \frac{p(p+1)}{p(p+1)^2} = 2 - \frac{1}{p+1}.$$

Hermed er induktionsskridtet fuldført, og ved kombination af induktionsaksiomet og Sætning 1.10 i [ETP][1], følger det nu, at udtrykket i (1) er sandt for ethvert $n \in \mathbb{N}$. □

[1] Forkortelse for „Funktioner af en og flere variable“, 2. udgave, af E. T. Poulsen.