# Aflevering i uge 4

## Opgave 233

Lad funktionen $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ være defineret ved

$$f(x) = \sin\bigl(x^{-1}\bigr).$$

Inden jeg går i gang med at løse opgaven, beviser jeg først følgende

**Lemma.** *Lad $A, B \subseteq \mathbb{R}$ og betragt funktionerne $g : A \to \mathbb{R}$ og $f : B \to \mathbb{R}$. Lad endvidere $c, d \in \mathbb{R}$ og antag, at*

*(i)* $\quad g(x) \to c \quad \textit{for} \quad x \to \infty,$

*(ii)* $\quad f(y) \to d \quad \textit{for} \quad y \to c.$

*Der gælder så, at*

$$f(g(x)) \to d \quad \textit{for} \quad x \to \infty.$$

**Bevis.** I og med, at $g$ skal være defineret „i nærheden af" $\infty$, antag da følgende:

$$\exists\, R > 0 \,:\, \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > R\} \subseteq A.$$

Fra (i) og (ii) har jeg, at

$$\forall\, \varepsilon_1 > 0 \,\exists\, K \in \mathbb{R} \,:\, x > K \Longrightarrow |g(x) - c| < \varepsilon_1, \tag{1}$$

$$\forall\, \varepsilon_2 > 0 \,\exists\, \delta > 0 \,:\, |y - c| \in (0, \delta) \Longrightarrow |f(y) - d| < \varepsilon_2. \tag{2}$$

Jeg skal vise, at

$$\forall\, \varepsilon_3 > 0 \,\exists\, K \in \mathbb{R} \,:\, x > K \Longrightarrow |f(g(x)) - d| < \varepsilon_3,$$

så lad $\varepsilon_3 > 0$ være givet. Anvend $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$ i (2) og find et $\delta$, således at $|y - c| \in (0, \delta) \Longrightarrow |f(y) - d| < \varepsilon_3$. Sæt nu $\varepsilon_1 = \delta$ og find et $K$, således at $x > K \Longrightarrow |g(x) - c| < \delta$.

Jeg har så følgende:

$$x > K \Longrightarrow |y - c| = |g(x) - c| < \delta \Longrightarrow |f(y) - d| = |f(g(x)) - d| < \varepsilon_3.$$

Altså er $\varepsilon_3$ blevet afparreret med et passende $K$, og lemmaet er hermed bevist. $\square$

**Proposition 1.** *Funktionen $f(x)$ har en grænseværdi for $x \to \infty$.*

**Bevis.** Af Sætning 6.39 (b) i [ETP][1] har jeg, at

$$x^{-1} \to 0 \quad \text{for} \quad x \to \infty.$$

Af lemmaet fås nu, at $\lim_{x\to\infty} \sin\bigl(x^{-1}\bigr) = \lim_{y\to 0} \sin(y)$, hvor $y = x^{-1}$. Da $\sin(y)$ er kontinuert på hele $\mathbb{R}$, har jeg så fra Sætning 6.37, at

$$\sin\bigl(x^{-1}\bigr) \to 0 \quad \text{for} \quad x \to \infty.$$

Hermed er Proposition 1 bevist. □

**Proposition 2.** *Funktionen $f(x)$ har ikke en grænseværdi for $x \to 0^+$.*

**Bevis.** At $f(x)$ har en grænseværdi for $x \to 0^+$ betyder, at

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall\, x \in \mathbb{R}_+ : x \in (0, \delta) \Longrightarrow \bigl|\sin\bigl(x^{-1}\bigr) - c\bigr| < \varepsilon$$

er defineret i et interval til højre for 0, hvor $c$ er grænseværdien. Jeg skal altså have bevist negationen, som siger at

$$\exists\, \varepsilon > 0\, \forall\, \delta > 0\, \exists\, x \in \mathbb{R}_+ : x \in (0, \delta) \wedge \bigl|\sin\bigl(x^{-1}\bigr) - c\bigr| \geq \varepsilon.$$

Først vil jeg undersøge, hvad der *kan* gælde om den hypotetiske grænseværdi $c$. Da domænet for $\sin(x)$ er $[-1, 1]$, må $c \in [-1, 1]$, hvis man skal kunne vurdere $\bigl|\sin\bigl(x^{-1}\bigr) - c\bigr|$ mindre end $\varepsilon$, for $\varepsilon < 1$. Hvis nu $c \leq 0$, så eksisterer der værdier, hvor

$$\sin\bigl(x^{-1}\bigr) - c = 1 \Longrightarrow x = \frac{1}{\arcsin(c-1) + 2k\pi}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Heraf ses tydeligt, at $x \to 0$ for $k \to \infty$. Netop derfor, kan jeg nu – uanset $\varepsilon$ – finde et $x \in (0, \delta)$, hvor $\sin\bigl(x^{-1}\bigr) - c = 1$. Altså er $\varepsilon = 1/2$ en værdi, hvor $\bigl|\sin\bigl(x^{-1}\bigr) - c\bigr| \geq \varepsilon$.

Analogt fås for $c > 0$, at man kan finde $x$, hvor $\sin\bigl(x^{-1}\bigr) - c = -1$, givet ved

$$x = \frac{1}{\arcsin(c-1) + 2k\pi}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Altså kan grænseværdien for $\sin\bigl(x^{-1}\bigr)$ for $x \to 0^+$ ikke eksistere. □

[1] Forkortelse for „Funktioner af en og flere variable“, 2. udgave, af E. T. Poulsen.