Svingningstid

Vi vil bestemme et udtryk for svingningstiden for et ideelt, matematisk pendul, ud fra energibetragtninger. Pendulet består af en stiv, masseløs snor med længden l, hvori der er fastgjort et lod med massen m. Vinklen, som snoren danner med lodret, kalder vi θ, og tyngdeaccelerationen, der antages at være konstant for hele systemet, betegnes g. Endelig antager vi, at systemet er friktionsløst.

Nu vælger vi et koordinatsystem med vinkelrette, kartesiske koordinater, med origo i loddets position, når pendulet når midterstillingen. Der gælder så, at

$$E_{\text{mek}} \coloneqq E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \tfrac{1}{2}mv^2 + mgh. \tag{1}$$

Vi ved videre, at loddets position, som funktion af θ, er givet ved

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} l\sin(\theta) \\ l\bigl(1-\cos(\theta)\bigr) \end{pmatrix} = l\begin{pmatrix} \sin(\theta) \\ 1-\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Da komposanterne i $\mathbf{r}$ er sammensatte funktioner, fås følgende:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = l\begin{pmatrix} \cos(\theta)d\theta \\ \sin(\theta)d\theta \end{pmatrix}\frac{1}{dt} = l\frac{d\theta}{dt}\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

Altså er

$$v^2 = \|\mathbf{v}\|^2 = l^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\bigl(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)\bigr) = l^2\frac{(d\theta)^2}{(dt)^2}.$$

Lidt simpel geometri viser, at loddets vertikale ændring i forhold til midterstillingen er givet ved $h = l\bigl(1-\cos(\theta)\bigr)$, så (1) kan nu skrives som

$$E_{\text{mek}} = \tfrac{1}{2}ml^2\frac{(d\theta)^2}{(dt)^2} + mgl\bigl(1-\cos(\theta)\bigr) = \tfrac{1}{2}ml^2\frac{(d\theta)^2}{(dt)^2} + mgl - mgl\cos(\theta).$$

Lad nu θ_0 betegne pendulets startudsving. Da pendulet er i hvile i starten, er $E_{\text{kin},0} = 0$, hvilket betyder, at

$$\begin{aligned}
&E_{\text{mek}} = E_{\text{pot},0} \implies \tfrac{1}{2}ml^2\frac{(d\theta)^2}{(dt)^2} + mgl - mgl\cos(\theta) = mgl - mgl\cos(\theta_0) \implies \\
&\tfrac{1}{2}ml^2\frac{(d\theta)^2}{(dt)^2} = mgl\bigl(\cos(\theta)-\cos(\theta_0)\bigr) \implies \frac{g}{l}(dt)^2 = \frac{(d\theta)^2}{2\bigl(\cos(\theta)-\cos(\theta_0)\bigr)} \implies \\
&\sqrt{\frac{g}{l}}dt = \frac{d\theta}{\sqrt{2}\sqrt{\cos(\theta)-\cos(\theta_0)}}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Ved den tredje implikation, har vi blandt andet separeret de variable.

Da integration fra $\theta = 0$ til den maksimale vinkel, der jo også er θ_0, svarer til at integrere over netop en kvart periode, gælder der følgende:

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{1}{4}T = \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2}\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}} \implies \frac{T}{4}\sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}}. \tag{3}$$

For at komme videre herfra, bruges nu den trigonometriske identitet

$$\cos(\theta) = 1 - 2\sin^2\left(\tfrac{1}{2}\theta\right),$$

$$\sin\left(\tfrac{1}{2}\theta\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos(\theta)}{2}}.$$

Omskrivning af nævneren i integranden i (3) giver

$$\begin{aligned}
\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)} &= \sqrt{1 - 2\sin^2\left(\tfrac{1}{2}\theta\right) - \cos(\theta_0)} \\
&= \sqrt{\big(1 - \cos(\theta_0)\big)\left(1 - 2\sin^2\left(\tfrac{1}{2}\theta\right)\frac{1}{1 - \cos(\theta_0)}\right)} \\
&= \sqrt{1 - \cos(\theta_0)}\sqrt{1 - \sin^2\left(\tfrac{1}{2}\theta\right)\frac{2}{1 - \cos(\theta_0)}} \\
&= \sqrt{2}\sqrt{\frac{1 - \cos(\theta_0)}{2}}\sqrt{1 - \frac{1}{\frac{1-\cos(\theta_0)}{2}}\sin^2\left(\tfrac{1}{2}\theta\right)} \\
&= \sqrt{2}\sin\left(\tfrac{1}{2}\theta_0\right)\sqrt{1 - \csc^2\left(\tfrac{1}{2}\theta_0\right)\sin^2\left(\tfrac{1}{2}\theta\right)}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Ved at indsætte (4) i (3), fås følgende:

$$\frac{T}{4}\sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{1}{2}\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sin\left(\tfrac{1}{2}\theta_0\right)\sqrt{1 - \csc^2\left(\tfrac{1}{2}\theta_0\right)\sin^2\left(\tfrac{1}{2}\theta\right)}}. \tag{5}$$

Dernæst laver vi substitutionen

$$\sin\left(\tfrac{1}{2}\theta\right) = \sin\left(\tfrac{1}{2}\theta_0\right)\sin(\varphi), \tag{6}$$

$$\sin^2\left(\tfrac{1}{2}\theta_0\right) = \frac{\sin^2\left(\tfrac{1}{2}\theta\right)}{\sin^2(\varphi)}, \tag{7}$$

hvor φ er den nye variabel. Differentiation af (6) giver nu

$$\tfrac{1}{2}\cos\left(\tfrac{1}{2}\theta\right)d\theta = \sin\left(\tfrac{1}{2}\theta_0\right)\cos(\varphi)d\varphi \implies d\theta = \frac{2\sin\left(\tfrac{1}{2}\theta_0\right)\cos(\varphi)d\varphi}{\cos\left(\tfrac{1}{2}\theta\right)}.$$

Ved brug af (7), fås følgende:

$$\sin^2\!\left(\tfrac{1}{2}\theta\right) + \cos^2\!\left(\tfrac{1}{2}\theta\right) = 1 \implies \cos^2\!\left(\tfrac{1}{2}\theta\right) + \frac{\sin^2\!\left(\frac{1}{2}\theta\right)}{\sin^2(\varphi)}\sin^2(\varphi) = 1 \implies$$
$$\cos^2\!\left(\tfrac{1}{2}\theta\right) + \sin^2\!\left(\tfrac{1}{2}\theta_0\right)\sin^2(\varphi) = 1 \implies \cos\!\left(\tfrac{1}{2}\theta\right) = \sqrt{1 - \sin^2\!\left(\tfrac{1}{2}\theta_0\right)\sin^2(\varphi)}.$$

Det vil sige, at

$$d\theta = \frac{2\sin\!\left(\frac{1}{2}\theta_0\right)\cos(\varphi)d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\!\left(\frac{1}{2}\theta_0\right)\sin^2(\varphi)}}. \tag{8}$$

Ved indsætning af (8) i (5), samt anvendelse af (7), kan vi nu lave omskrivningen

$$\begin{aligned}
\frac{T}{4}\sqrt{\frac{g}{l}} &= \frac{1}{2}\int_0^{\theta_0} \frac{1}{\sin\!\left(\frac{1}{2}\theta_0\right)\sqrt{1 - \csc^2\!\left(\frac{1}{2}\theta_0\right)\sin^2\!\left(\frac{1}{2}\theta\right)}}\frac{2\sin\!\left(\frac{1}{2}\theta_0\right)\cos(\varphi)d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\!\left(\frac{1}{2}\theta_0\right)\sin^2(\varphi)}}\\
&= \int_0^{\theta_0} \frac{\cos(\varphi)d\varphi}{\sqrt{1 - \csc^2\!\left(\frac{1}{2}\theta_0\right)\sin^2\!\left(\frac{1}{2}\theta\right)}\sqrt{1 - \sin^2\!\left(\frac{1}{2}\theta_0\right)\sin^2(\varphi)}}\\
&= \int_0^{\theta_0} \frac{\cos(\varphi)d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}\theta\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}\theta_0\right)}}\sqrt{1 - \sin^2\!\left(\frac{1}{2}\theta_0\right)\sin^2(\varphi)}}\\
&= \int_0^{\theta_0} \frac{\cos(\varphi)d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2(\varphi)}\sqrt{1 - \sin^2\!\left(\frac{1}{2}\theta_0\right)\sin^2(\varphi)}}\\
&= \int_0^{\theta_0} \frac{\cos(\varphi)d\varphi}{\cos(\varphi)\sqrt{1 - \sin^2\!\left(\frac{1}{2}\theta_0\right)\sin^2(\varphi)}}\\
&= \int_0^{\theta_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\!\left(\frac{1}{2}\theta_0\right)\sin^2(\varphi)}}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Isolering af T i (9) giver så følgende:

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\theta_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\!\left(\frac{1}{2}\theta_0\right)\sin^2(\varphi)}}. \tag{10}$$

Vi kunne nok godt selv evaluere integralet i (10), men ifølge ligning **703**. på side 454 i „CRC—Standard Mathematical Tables and Formulae", 31. udgave, så er

$$\int_0^{\theta_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\!\left(\frac{1}{2}\theta_0\right)\sin^2(\varphi)}} = \frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\prod_{n=1}^{k}\frac{2n-1}{2n}\right)^2 \sin^{2k}\!\left(\tfrac{1}{2}\theta_0\right). \tag{11}$$

Af identiteten mellem (3) og (4), samt (11), har vi følgende:

$$\sin^{2k}\bigl(\tfrac{1}{2}\theta_0\bigr) = \left(\sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{2}}\right)^{2k} = \frac{\bigl(1-\cos(\theta_0)\bigr)^k}{2^k}. \tag{12}$$

Ved kombination af (10)–(12), finder men nu, at den eksakte svingningstid for et idealiseret, matematisk pendul er givet ved

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\prod_{n=1}^{k}\frac{(2n-1)^2}{4n^2}\right)\frac{\bigl(1-\cos(\theta_0)\bigr)^k}{2^k}.$$