

## TØ-opgaver til uge 45

Først laver vi en liste over de ligninger med mere i [ITP], der skal bruges:

- [1]: Ligning (2.5) på side 4.
- [2]: Ligning (2.6) på side 5.
- [3]: Sætning 3.1, ligning (3.3) på side 7.
- [4]: Sætning 3.1, ligning (3.4) på side 7.
- [5]: Sætning 3.1, ligning (3.5) på side 7.
- [6]: Ligning (4.2) på side 13.
- [7]: Ligningen øverst på side 125.
- [8]: Ligning (A.3) på side 126.
- [9]: Ligning (A.4) på side 126.
- [10]: Implikation (A.8) på side 127.
- [11]: Ligning (B.3) på side 131.

### Opgave 1

Lad  $A$  og  $B$  være hændelser, således at  $P(A) = 0,6$ ,  $P(B) = 0,5$  og  $P(A \cup B) = 0,8$ . Vi skal nu have bestemt sandsynligheden for hver af hændelserne  $A \cap B$ ,  $A^C$ ,  $B^C$ ,  $A^C \cap B^C$  og  $A^C \cup B^C$ . Vi finder følgende:

$$P(A \cap B) \stackrel{[5]}{=} P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,6 + 0,5 - 0,8 = \underline{\underline{0,3}};$$

$$P(A^C) \stackrel{[4]}{=} 1 - P(A) = 1 - 0,6 = \underline{\underline{0,4}};$$

$$P(B^C) \stackrel{[4]}{=} 1 - P(B) = 1 - 0,5 = \underline{\underline{0,5}};$$

$$P(A^C \cap B^C) \stackrel{[8]}{=} P((A \cup B)^C) \stackrel{[4]}{=} 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,8 = \underline{\underline{0,2}};$$

$$P(A^C \cup B^C) \stackrel{[9]}{=} P((A \cap B)^C) \stackrel{[4]}{=} 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,3 = \underline{\underline{0,7}}.$$

### Opgave 2

Betragt spillet „kast med 3 mønter ( $m_1$ ,  $m_2$  og  $m_3$ )“, hvor der er tale om „perfekte“ mønter i den forstand, at sandsynligheden for at slå plat ( $p$ ) henholdsvis krone ( $k$ ) begge er 50%.

Vi har nu et sandsynlighedsrum  $(E, \mathcal{F}, P)$ , hvor

$$E = \{(m_1, m_2, m_3) \mid (p, p, p), (p, p, k), (p, k, p), (k, p, p), (p, k, k), (k, p, k), (k, k, p), (k, k, k)\},$$

$\mathcal{F}$  er en  $\sigma$ -algebra, bestående af samtlige delmængder af  $E$ ,

$P: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  er et *uniformt* sandsynlighedsmål på  $\mathcal{F}$ .

**Spørgsmål (i)**

En simpel optælling viser, at  $\#E = 8$ , så der er altså 8 mulige udfald.

**Spørgsmål (ii)**

Betragt hændelserne være hændelser, der er givet ved

$$\begin{aligned} A &= \{(m_1, m_2, m_3) \mid \text{Alle mønter viser plat}\} = \{(p, p, p)\}, \\ B &= \{(m_1, m_2, m_3) \mid \text{Mindst én mønt viser krone}\} = \{(p, p, p)\}^C, \\ C &= \{(m_1, m_2, m_3) \mid \text{Netop én mønt viser krone}\} = \{(p, p, k), (p, k, p), (k, p, p)\}. \end{aligned}$$

Vi bemærker, at  $\#A = 1$ ,  $\#B = \#E - \#A = 7$  og  $\#C = 3$ , så

$$P(A) \stackrel{[1]}{=} \frac{\#A}{\#E} = \frac{1}{\underline{\underline{8}}}; \quad P(B) \stackrel{[1]}{=} \frac{\#B}{\#E} = \frac{7}{\underline{\underline{8}}}; \quad P(C) \stackrel{[1]}{=} \frac{\#C}{\#E} = \frac{3}{\underline{\underline{8}}}.$$

**Spørgsmål (iii)**

Se nu på spillet „kast med  $n \in \mathbb{N}$  mønter  $(m_1, \dots, m_n)$ “, og betragt sandsynlighedsrummet  $(E, \mathcal{F}, P)$ , hvor  $P$  og  $\mathcal{F}$  er givet som i Spørgsmål (ii), hvorimod der nu gælder, at

$$E = \{\text{Samtlige permutationer af } n\text{-tuplet } (m_1, \dots, m_n)\}.$$

Lad yderligere  $A, B, C \in \mathcal{F}$  været givet som ovenfor. Igen ønsker vi at finde  $P(A)$ ,  $P(B)$  og  $P(C)$ , så først husker vi på, at

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

Af [11] har vi nu, at

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

hvor vi kan betragte  $k$  som antallet af mønter, der viser krone (eller plat), med koefficienterne  $\binom{n}{k}$  som antallet af muligheder for, at  $k$  af de  $n$  mønter viser krone (eller plat). Dette gør det ganske nemt at løse opgaven, thi så har vi nemlig, at

$$\begin{aligned} P(A) &\stackrel{[1]}{=} \frac{\#A}{\#E} = \frac{\binom{n}{0}}{2^n} = \underline{\underline{2^{-n}}}, \\ P(B) &\stackrel{[1]}{=} \frac{\#B}{\#E} \stackrel{[4]}{=} 1 - P(A) = \underline{\underline{1 - 2^{-n}}}, \\ P(C) &\stackrel{[1]}{=} \frac{\#C}{\#E} = \frac{\binom{n}{1}}{2^n} = \underline{\underline{n \cdot 2^{-n}}}. \end{aligned}$$

**Spørgsmål (iv)**

Som det sidste i denne opgave, skal vi have afgjort hvor mange mønter vi skal have, før sandsynligheden for at få mindst én krone er større end 95%. Af Spørgsmål (ii) ser vi, at dette svarer til at finde det mindste  $n \in \mathbb{N}$ , der opfylder uligheden

$$1 - 2^{-n} > 0,95.$$

Dette er nemt klaret, for om følgen  $S_n := \{1 - 2^{-n}\}_{n=0}^{\infty}$  gælder der, at

$$S_4 = 1 - 2^{-4} = \frac{15}{16} = 0,9375 < 0,95,$$

$$S_5 = 1 - 2^{-5} = \frac{31}{32} = 0,96875 > 0,95,$$

så svaret er 5 mønter.

**Opgave 4**

Betragt det *uniforme* sandsynlighedsmål på  $E = [0, 10]$ . Da  $E$  er et interval, vælger vi  $\mathcal{F} = \mathcal{B}(E)$ . Vi har nu hændelserne  $A, B, C \in \mathcal{F}$ , hvor  $A = [0, 5]$ ,  $B = [1, 7]$  og  $C = [4, 9]$ .

Nu skal vi have undersøgt, hvorvidt  $(A$  og  $B)$ ,  $(A$  og  $C)$  og  $(B$  og  $C)$  er uafhængige. Altså skal vi undersøge, hvilke af de tre kombinationer, der opfylder [6]. Først fås, at

$$A \cap B = [1, 5], \quad A \cap C = [4, 5], \quad B \cap C = [4, 7],$$

hvilket giver følgende:

$$|A| = 5 - 0 = 5, \quad |B| = 7 - 1 = 6, \quad |C| = 9 - 4 = 5,$$

$$|A \cap B| = 5 - 1 = 4, \quad |A \cap C| = 5 - 4 = 1, \quad |B \cap C| = 7 - 4 = 3.$$

Da  $|E| = 10 - 0 = 10$ , er

$$P(A \cap B) \stackrel{[2]}{=} \frac{|A \cap B|}{|E|} = \frac{4}{10}, \quad P(A)P(B) \stackrel{[2]}{=} \frac{|A|}{|E|} \frac{|B|}{|E|} = \frac{5}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{3}{10}.$$

$$P(A \cap C) \stackrel{[2]}{=} \frac{|A \cap C|}{|E|} = \frac{1}{10}, \quad P(A)P(C) \stackrel{[2]}{=} \frac{|A|}{|E|} \frac{|C|}{|E|} = \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{5}{20}.$$

$$P(B \cap C) \stackrel{[2]}{=} \frac{|B \cap C|}{|E|} = \frac{3}{10}, \quad P(B)P(C) \stackrel{[2]}{=} \frac{|B|}{|E|} \frac{|C|}{|E|} = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{3}{10}.$$

Af [6] fås så, at  $A$  og  $B$  er ikke uafhængige,  $A$  og  $C$  er heller ikke uafhængige, hvorimod  $B$  og  $C$  er uafhængige.

## Opgave 12

Vi ser nu på spillet „en mønt kastes 2 gange ( $m_1$  og  $m_2$ )“, hvor der er tale om „perfekte“ mønter; sandsynligheden for at slå plat ( $p$ ) henholdsvis krone ( $k$ ) er  $1/2$  for hver.

Betragt sandsynlighedsrummet  $(E, \mathcal{F}, P)$ , hvor

$$\begin{aligned} E &= \{(m_1, m_2) \mid (p, p), (p, k), (k, p), (k, k)\}, \\ \mathcal{F} &\text{ er en } \sigma\text{-algebra, bestående af samtlige delmængder af } E, \\ P : \mathcal{F} &\rightarrow [0, 1] \text{ er et } \textit{uniformt} \text{ sandsynlighedsmål på } \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Som det næste, definerer vi nu to hændelser  $A, B \in \mathcal{F}$  ved

$$\begin{aligned} A &= \{(m_1, m_2) \mid \text{Plat i første kast}\} = \{(p, p), (p, k)\}, \\ B &= \{(m_1, m_2) \mid \text{Krone i andet kast}\} = \{(p, k), (k, k)\}. \end{aligned}$$

Da  $A \cap B = \{(p, k)\} \neq \emptyset$ , ser vi af [7], at  $A$  og  $B$  ikke er disjunkte hændelser.

## Opgave 14

Lad  $(E, \mathcal{F}, P)$  være et sandsynlighedsrum og lad  $A \in \mathcal{F}$  være en hændelse. Vi skal have vist følgende biimplikation:

$$A \text{ er uafhængig af sig selv} \iff P(A) = 0 \text{ eller } P(A) = 1.$$

Først beviser vi  $\implies$ -delen. Antag derfor, at  $A$  er uafhængig af sig selv. Da  $A = A \cap A$ , er

$$P(A) = P(A \cap A) \stackrel{[6]}{=} P(A)P(A) = (P(A))^2.$$

Dette er tydeligvis kun opfyldt, såfremt  $P(A) = 0$  eller  $P(A) = 1$ .

Lad os dernæst bevise  $\impliedby$ -delen, så antag derfor, at  $P(A) = 0$ . Af Opgave 13 har vi, at  $P(A \cup A) = 0$ , så

$$P(A \cap A) \stackrel{[5]}{=} P(A) + P(A) - P(A \cup A) = 0 + 0 - 0 = 0.$$

Eftersom  $P(A \cap A) = (P(A))^2$ , følger det af [6], at  $A$  er uafhængig af sig selv. Antag nu, at  $P(A) = 1$ . Ifølge Opgave 13 har vi så, at  $P(A \cap A) = 1$ . Altså er  $P(A \cap A) = (P(A))^2$ , og igen bruger vi [6] til at konkludere, at  $A$  er uafhængig af sig selv.

## Opgave 15

Lad  $(E, \mathcal{F}, P)$  være et sandsynlighedsrum, hvor  $\mathcal{F}$  er en  $\sigma$ -algebra, og lad  $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$  være uafhængige hændelser. Af [10] har vi, at  $A_1^C, A_2^C \in \mathcal{F}$ .

**Spørgsmål (i)**

Vi skal nu have vist, at  $A_1$  og  $A_2^C$  er uafhængige hændelser. Det første man bemærker er, at  $A_1 \cap A_2^C = A_1 \setminus (A_1 \cap A_2)$ . Da  $A_1 \cap A_2 \subseteq A_1$ , har vi følgende:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2^C) &= P(A_1 \setminus (A_1 \cap A_2)) \\ &\stackrel{[3]}{=} P(A_1) - P(A_1 \cap A_2) \\ &\stackrel{[6]}{=} P(A_1) - P(A_1)P(A_2) \\ &= P(A_1)(1 - P(A_2)) \\ &\stackrel{[4]}{=} P(A_1)P(A_2^C). \end{aligned}$$

Af [6] følger det nu, at  $A_1$  og  $A_2^C$  er uafhængige.

**Spørgsmål (ii)**

Som det næste skal vi vise, at  $A_1^C$  og  $A_2^C$  er uafhængige hændelser. En direkte udregning viser, at

$$\begin{aligned} P(A_1^C \cap A_2^C) &\stackrel{[9]}{=} P((A_1 \cup A_2)^C) \\ &\stackrel{[4]}{=} 1 - P(A_1 \cup A_2) \\ &\stackrel{[5]}{=} 1 - (P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)) \\ &\stackrel{[6]}{=} 1 - P(A_1) - P(A_2) + P(A_1)P(A_2) \\ &= (1 - P(A_1))(1 - P(A_2)) \\ &\stackrel{[4]}{=} P(A_1^C)P(A_2^C). \end{aligned}$$

Igen bruger vi [6] til at konkludere, at  $A_1^C$  og  $A_2^C$  er uafhængige hændelser.

**Opgave 48**

Betragt spillet „kast med 4 terninger ( $t_1, t_2, t_3$  og  $t_4$ )“. Terningerne er „perfekte“ i den forstand, at der er lige stor sandsynlighed for at en terning viser en af øjentallene  $1, \dots, 6$ . Slås fire ens, får man en gratis øl, og ellers koster øllen det samlede antal øjne på de fire terninger.

Vi har et sandsynlighedsrum  $(E, \mathcal{F}, P)$ , hvor

$$\begin{aligned} E &= \{(t_1, t_2, t_3, t_4) \mid t_i = 1, \dots, 6 \text{ for } i = 1, \dots, 4\}, \\ \mathcal{F} &\text{ er en } \sigma\text{-algebra, bestående af samtlige delmængder af } E, \\ P : \mathcal{F} &\rightarrow [0, 1] \text{ er et } \textit{uniformt} \text{ sandsynlighedsmål på } \mathcal{F}. \end{aligned}$$

**Spørgsmål (i)**

Betragt nu de to hændelser  $A, B \in \mathcal{F}$ , hvor

$$\begin{aligned} A &= \text{Man får en gratis øl} \\ &= \{(t_1, t_2, t_3, t_4) \mid \text{Alle fire terninger viser det samme antal øjne}\} \\ &= \{(1, 1, 1, 1), (2, 2, 2, 2), (3, 3, 3, 3), (4, 4, 4, 4), (5, 5, 5, 5), (6, 6, 6, 6)\}, \end{aligned}$$

$$B = \text{Man skal betale for sin øl} = A^C.$$

Vi har nu, at  $\#E = 6^4 = 1296$  og  $\#A = 6$ . Altså er

$$\begin{aligned} P(A) &\stackrel{[1]}{=} \frac{\#A}{\#E} = \frac{6}{1296} = \frac{1}{\underline{\underline{216}}}, \\ P(B) &\stackrel{[4]}{=} 1 - P(A) = \frac{216}{216} - \frac{1}{216} = \frac{215}{\underline{\underline{216}}}. \end{aligned}$$

**Spørgsmål (ii)**

Lad nu  $C \in \mathcal{F}$  være givet ved

$$C = \text{Summen af de viste øjne, på de fire terninger.}$$

Analogt Opgave 2 fås, at

$$\#\{C = 23\} = \binom{4}{1} = 4, \quad \#\{C = 22\} = \binom{4}{1} + \binom{4}{2} = 4 + 6 = 10.$$

Dette giver så følgende:

$$\begin{aligned} P(C = 23) &\stackrel{[1]}{=} \frac{\#\{C = 23\}}{\#E} = \frac{4}{1296} = \frac{1}{\underline{\underline{324}}}, \\ P(C = 22) &\stackrel{[1]}{=} \frac{\#\{C = 22\}}{\#E} = \frac{10}{1296} = \frac{5}{\underline{\underline{648}}}. \end{aligned}$$

**Litteratur**

[ITP] Preben Blæsild og Jan Pedersen. *An Introduction to Probability Theory*, 3. udgave. Aarhus Universitet, Danmark 2004.