

TØ-opgaver til uge 45

Først laver vi en liste over de ligninger med mere i [IPT], der skal bruges:

- [1]: Ligning (2.5) på side 4.
- [2]: Ligning (2.6) på side 5.
- [3]: Sætning 3.1, ligning (3.3) på side 7.
- [4]: Sætning 3.1, ligning (3.4) på side 7.
- [5]: Sætning 3.1, ligning (3.5) på side 7.
- [6]: Ligning (4.2) på side 13.
- [7]: Ligningen øverst på side 125.
- [8]: Ligning (A.3) på side 126.
- [9]: Ligning (A.4) på side 126.
- [10]: Implikation (A.8) på side 127.
- [11]: Ligning (B.3) på side 131.

Opgave 1

Lad A og B være hændelser, således at $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,5$ og $P(A \cup B) = 0,8$. Vi skal nu have bestemt sandsynligheden for hver af hændelserne $A \cap B$, A^c , B^c , $A^c \cap B^c$ og $A^c \cup B^c$. Vi finder følgende:

$$P(A \cap B) \stackrel{[5]}{=} P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,6 + 0,5 - 0,8 = \underline{\underline{0,3}};$$

$$P(A^c) \stackrel{[4]}{=} 1 - P(A) = 1 - 0,6 = \underline{\underline{0,4}};$$

$$P(B^c) \stackrel{[4]}{=} 1 - P(B) = 1 - 0,5 = \underline{\underline{0,5}};$$

$$P(A^c \cap B^c) \stackrel{[8]}{=} P((A \cup B)^c) \stackrel{[4]}{=} 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,8 = \underline{\underline{0,2}};$$

$$P(A^c \cup B^c) \stackrel{[9]}{=} P((A \cap B)^c) \stackrel{[4]}{=} 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,3 = \underline{\underline{0,7}}.$$

Opgave 2

Betragt spillet „kast med 3 mønter (m_1 , m_2 og m_3)“, hvor der er tale om „perfekte“ mønter i den forstand, at sandsynligheden for at slå plat (p) henholdsvis krone (k) begge er 50%.

Vi har nu et sandsynlighedsrum (E, \mathcal{F}, P) , hvor

$$E = \{(m_1, m_2, m_3) \mid (p, p, p), (p, p, k), (p, k, p), (k, p, p), (p, k, k), (k, p, k), (k, k, p), (k, k, k)\},$$

\mathcal{F} er en σ -algebra, bestående af samtlige delmængder af E ,

$P: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ er et *uniformt* sandsynlighedsmål på \mathcal{F} .

Spørgsmål (i)

En simpel optælling viser, at $\#E = 8$, så der er altså 8 mulige udfald.

Spørgsmål (ii)

Betragt hændelserne være hændelser, der er givet ved

$$\begin{aligned} A &= \{(m_1, m_2, m_3) \mid \text{Alle mønter viser plat}\} = \{(p, p, p)\}, \\ B &= \{(m_1, m_2, m_3) \mid \text{Mindst én mønt viser krone}\} = \{(p, p, p)\}^C, \\ C &= \{(m_1, m_2, m_3) \mid \text{Netop én mønt viser krone}\} = \{(p, p, k), (p, k, p), (k, p, p)\}. \end{aligned}$$

Vi bemærker, at $\#A = 1$, $\#B = \#E - \#A = 7$ og $\#C = 3$, så

$$P(A) \stackrel{[1]}{=} \frac{\#A}{\#E} = \frac{1}{\underline{\underline{8}}}; \quad P(B) \stackrel{[1]}{=} \frac{\#B}{\#E} = \frac{7}{\underline{\underline{8}}}; \quad P(C) \stackrel{[1]}{=} \frac{\#C}{\#E} = \frac{3}{\underline{\underline{8}}}.$$

Spørgsmål (iii)

Se nu på spillet „kast med $n \in \mathbb{N}$ mønter (m_1, \dots, m_n) “, og betragt sandsynlighedsrummet (E, \mathcal{F}, P) , hvor P og \mathcal{F} er givet som i Spørgsmål (ii), hvorimod der nu gælder, at

$$E = \{\text{Samtlige permutationer af } n\text{-tuplet } (m_1, \dots, m_n)\}.$$

Lad yderligere $A, B, C \in \mathcal{F}$ være givet som ovenfor. Igen ønsker vi at finde $P(A)$, $P(B)$ og $P(C)$, så først husker vi på, at

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

Af [11] har vi nu, at

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

hvor vi kan betragte k som antallet af mønter, der viser krone (eller plat), med koefficienterne $\binom{n}{k}$ som antallet af muligheder for, at k af de n mønter viser krone (eller plat). Dette gør det ganske nemt at løse opgaven, thi så har vi nemlig, at

$$\begin{aligned} P(A) &\stackrel{[1]}{=} \frac{\#A}{\#E} = \frac{\binom{n}{0}}{2^n} = \underline{\underline{2^{-n}}}, \\ P(B) &\stackrel{[1]}{=} \frac{\#B}{\#E} \stackrel{[4]}{=} 1 - P(A) = \underline{\underline{1 - 2^{-n}}}, \\ P(C) &\stackrel{[1]}{=} \frac{\#C}{\#E} = \frac{\binom{n}{1}}{2^n} = \underline{\underline{n \cdot 2^{-n}}}. \end{aligned}$$

Spørgsmål (iv)

Som det sidste i denne opgave, skal vi have afgjort hvor mange mønter vi skal have, før sandsynligheden for at få mindst én krone er større end 95%. Af Spørgsmål (ii) ser vi, at dette svarer til at finde det mindste $n \in \mathbb{N}$, der opfylder uligheden

$$1 - 2^{-n} > 0,95.$$

Dette er nemt klaret, for om følgen $S_n := \{1 - 2^{-n}\}_{n=0}^{\infty}$ gælder der, at

$$S_4 = 1 - 2^{-4} = \frac{15}{16} = 0,9375 < 0,95,$$

$$S_5 = 1 - 2^{-5} = \frac{31}{32} = 0,96875 > 0,95,$$

så svaret er 5 mønter.

Opgave 4

Betragt det *uniforme* sandsynlighedsmål på $E = [0, 10]$. Da E er et interval, vælger vi $\mathcal{F} = \mathcal{B}(E)$. Vi har nu hændelserne $A, B, C \in \mathcal{F}$, hvor $A = [0, 5]$, $B = [1, 7]$ og $C = [4, 9]$.

Nu skal vi have undersøgt, hvorvidt $(A$ og $B)$, $(A$ og $C)$ og $(B$ og $C)$ er uafhængige. Altså skal vi undersøge, hvilke af de tre kombinationer, der opfylder [6]. Først fås, at

$$A \cap B = [1, 5], \quad A \cap C = [4, 5], \quad B \cap C = [4, 7],$$

hvilket giver følgende:

$$|A| = 5 - 0 = 5, \quad |B| = 7 - 1 = 6, \quad |C| = 9 - 4 = 5,$$

$$|A \cap B| = 5 - 1 = 4, \quad |A \cap C| = 5 - 4 = 1, \quad |B \cap C| = 7 - 4 = 3.$$

Da $|E| = 10 - 0 = 10$, er

$$P(A \cap B) \stackrel{[2]}{=} \frac{|A \cap B|}{|E|} = \frac{4}{10}, \quad P(A)P(B) \stackrel{[2]}{=} \frac{|A|}{|E|} \frac{|B|}{|E|} = \frac{5}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{3}{10}.$$

$$P(A \cap C) \stackrel{[2]}{=} \frac{|A \cap C|}{|E|} = \frac{1}{10}, \quad P(A)P(C) \stackrel{[2]}{=} \frac{|A|}{|E|} \frac{|C|}{|E|} = \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{5}{20}.$$

$$P(B \cap C) \stackrel{[2]}{=} \frac{|B \cap C|}{|E|} = \frac{3}{10}, \quad P(B)P(C) \stackrel{[2]}{=} \frac{|B|}{|E|} \frac{|C|}{|E|} = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{3}{10}.$$

Af [6] fås så, at A og B er ikke uafhængige, A og C er heller ikke uafhængige, hvorimod B og C er uafhængige.

Opgave 12

Vi ser nu på spillet „en mønt kastes 2 gange (m_1 og m_2)“, hvor der er tale om „perfekte“ mønter; sandsynligheden for at slå plat (p) henholdsvis krone (k) er $1/2$ for hver.

Betragt sandsynlighedsrummet (E, \mathcal{F}, P) , hvor

$$\begin{aligned} E &= \{(m_1, m_2) \mid (p, p), (p, k), (k, p), (k, k)\}, \\ \mathcal{F} &\text{ er en } \sigma\text{-algebra, bestående af samtlige delmængder af } E, \\ P : \mathcal{F} &\rightarrow [0, 1] \text{ er et } \textit{uniformt} \text{ sandsynlighedsmål på } \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Som det næste, definerer vi nu to hændelser $A, B \in \mathcal{F}$ ved

$$\begin{aligned} A &= \{(m_1, m_2) \mid \text{Plat i første kast}\} = \{(p, p), (p, k)\}, \\ B &= \{(m_1, m_2) \mid \text{Krone i andet kast}\} = \{(p, k), (k, k)\}. \end{aligned}$$

Da $A \cap B = \{(p, k)\} \neq \emptyset$, ser vi af [7], at A og B ikke er disjunkte hændelser.

Opgave 14

Lad (E, \mathcal{F}, P) være et sandsynlighedsrum og lad $A \in \mathcal{F}$ være en hændelse. Vi skal have vist følgende biimplikation:

$$A \text{ er uafhængig af sig selv} \iff P(A) = 0 \text{ eller } P(A) = 1.$$

Først beviser vi \implies -delen. Antag derfor, at A er uafhængig af sig selv. Da $A = A \cap A$, er

$$P(A) = P(A \cap A) \stackrel{[6]}{=} P(A)P(A) = (P(A))^2.$$

Dette er tydeligvis kun opfyldt, såfremt $P(A) = 0$ eller $P(A) = 1$.

Lad os dernæst bevise \impliedby -delen, så antag derfor, at $P(A) = 0$. Af Opgave 13 har vi, at $P(A \cup A) = 0$, så

$$P(A \cap A) \stackrel{[5]}{=} P(A) + P(A) - P(A \cup A) = 0 + 0 - 0 = 0.$$

Eftersom $P(A \cap A) = (P(A))^2$, følger det af [6], at A er uafhængig af sig selv. Antag nu, at $P(A) = 1$. Ifølge Opgave 13 har vi så, at $P(A \cap A) = 1$. Altså er $P(A \cap A) = (P(A))^2$, og igen bruger vi [6] til at konkludere, at A er uafhængig af sig selv.

Opgave 15

Lad (E, \mathcal{F}, P) være et sandsynlighedsrum, hvor \mathcal{F} er en σ -algebra, og lad $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ være uafhængige hændelser. Af [10] har vi, at $A_1^c, A_2^c \in \mathcal{F}$.

Spørgsmål (i)

Vi skal nu have vist, at A_1 og A_2^c er uafhængige hændelser. Det første man bemærker er, at $A_1 \cap A_2^c = A_1 \setminus (A_1 \cap A_2)$. Da $A_1 \cap A_2 \subseteq A_1$, har vi følgende:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2^c) &= P(A_1 \setminus (A_1 \cap A_2)) \\ &\stackrel{[3]}{=} P(A_1) - P(A_1 \cap A_2) \\ &\stackrel{[6]}{=} P(A_1) - P(A_1)P(A_2) \\ &= P(A_1)(1 - P(A_2)) \\ &\stackrel{[4]}{=} P(A_1)P(A_2^c). \end{aligned}$$

Af [6] følger det nu, at A_1 og A_2^c er uafhængige.

Spørgsmål (ii)

Som det næste skal vi vise, at A_1^c og A_2^c er uafhængige hændelser. En direkte udregning viser, at

$$\begin{aligned} P(A_1^c \cap A_2^c) &\stackrel{[9]}{=} P((A_1 \cup A_2)^c) \\ &\stackrel{[4]}{=} 1 - P(A_1 \cup A_2) \\ &\stackrel{[5]}{=} 1 - (P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)) \\ &\stackrel{[6]}{=} 1 - P(A_1) - P(A_2) + P(A_1)P(A_2) \\ &= (1 - P(A_1))(1 - P(A_2)) \\ &\stackrel{[4]}{=} P(A_1^c)P(A_2^c). \end{aligned}$$

Igen bruger vi [6] til at konkludere, at A_1^c og A_2^c er uafhængige hændelser.

Opgave 48

Betragt spillet „kast med 4 terninger (t_1, t_2, t_3 og t_4)“. Terningerne er „perfekte“ i den forstand, at der er lige stor sandsynlighed for at en terning viser en af øjentalene $1, \dots, 6$. Slås fire ens, får man en gratis øl, og ellers koster øllen det samlede antal øjne på de fire terninger.

Vi har et sandsynlighedsrum (E, \mathcal{F}, P) , hvor

$$\begin{aligned} E &= \{(t_1, t_2, t_3, t_4) \mid t_i = 1, \dots, 6 \text{ for } i = 1, \dots, 4\}, \\ \mathcal{F} &\text{ er en } \sigma\text{-algebra, bestående af samtlige delmængder af } E, \\ P : \mathcal{F} &\rightarrow [0, 1] \text{ er et } \textit{uniformt} \text{ sandsynlighedsmål på } \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Spørgsmål (i)

Betragt nu de to hændelser $A, B \in \mathcal{F}$, hvor

$$\begin{aligned} A &= \text{Man får en gratis øl} \\ &= \{(t_1, t_2, t_3, t_4) \mid \text{Alle fire terninger viser det samme antal øjne}\} \\ &= \{(1, 1, 1, 1), (2, 2, 2, 2), (3, 3, 3, 3), (4, 4, 4, 4), (5, 5, 5, 5), (6, 6, 6, 6)\}, \end{aligned}$$

$$B = \text{Man skal betale for sin øl} = A^C.$$

Vi har nu, at $\#E = 6^4 = 1296$ og $\#A = 6$. Altså er

$$\begin{aligned} P(A) &\stackrel{[1]}{=} \frac{\#A}{\#E} = \frac{6}{1296} = \frac{1}{\underline{\underline{216}}}, \\ P(B) &\stackrel{[4]}{=} 1 - P(A) = \frac{216}{216} - \frac{1}{216} = \frac{215}{\underline{\underline{216}}}. \end{aligned}$$

Spørgsmål (ii)

Lad nu $C \in \mathcal{F}$ være givet ved

$$C = \text{Summen af de viste øjne, på de fire terninger.}$$

Analogt Opgave 2 fås, at

$$\#\{C = 23\} = \binom{4}{1} = 4, \quad \#\{C = 22\} = \binom{4}{1} + \binom{4}{2} = 4 + 6 = 10.$$

Dette giver så følgende:

$$\begin{aligned} P(\{C = 23\}) &\stackrel{[1]}{=} \frac{\#\{C = 23\}}{\#E} = \frac{4}{1296} = \frac{1}{\underline{\underline{324}}}, \\ P(\{C = 22\}) &\stackrel{[1]}{=} \frac{\#\{C = 22\}}{\#E} = \frac{10}{1296} = \frac{5}{\underline{\underline{648}}}. \end{aligned}$$

Litteratur

[IPT] Preben Blæsild og Jan Pedersen. *An Introduction to Probability Theory*, 3. udgave. Aarhus Universitet, Danmark 2004.