Mundtlig eksamen

Sætning

Matrixmultiplikation er associativt. Det vil sige, at for passende matricer A, B *og* C, *er*

$$(\mathsf{AB})\mathsf{C} = \mathsf{A}(\mathsf{BC}).$$

Bevis

Lad A være en $m \times n$-matrix, B en $n \times s$-matrix og C en $s \times r$-matrix. Af definitionen på multiplikation af to matricer, ser vi at *den i'te række i* AB har indgangene

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{k1}, \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{k2}, \quad \ldots, \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}, \quad \ldots, \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ks}$$

og at *den j'th søjle i* BC har indgangene

$$\sum_{l=1}^{s} b_{1l}c_{lj}, \quad \sum_{l=1}^{s} b_{2l}c_{lj}, \quad \ldots, \quad \sum_{l=1}^{s} b_{il}c_{lj}, \quad \ldots, \quad \sum_{l=1}^{s} b_{nl}c_{lj}.$$

Dette betyder, at den (i, j)'te indgang i $(\mathsf{AB})\mathsf{C}$ henholdsvis $\mathsf{A}(\mathsf{BC})$ er givet ved

$$\begin{aligned}
((ab)c)_{ij} &= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{k1}\right)c_{1j} + \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{k2}\right)c_{2j} + \cdots + \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ks}\right)c_{sj} \\
&= \sum_{l=1}^{s}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl}\right)c_{lj}\right] \\
&= \sum_{l=1}^{s}\left(\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}b_{kl}c_{lj})\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a(bc))_{ij} &= a_{i1}\sum_{l=1}^{s} b_{1l}c_{lj} + a_{i2}\sum_{l=1}^{s} b_{2l}c_{lj} + \cdots + a_{in}\sum_{l=1}^{s} b_{nl}c_{lj} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(a_{ik}\sum_{l=1}^{s} b_{kl}c_{lj}\right) \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{l=1}^{s}\left(\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}b_{kl}c_{lj})\right).
\end{aligned}$$

I $(*)$ har vi brugt, at det er ligegyldigt i hvilken rækkefølge man summer. Da hver indgang i $(\mathsf{AB})\mathsf{C}$ er lig med hver indgang $\mathsf{A}(\mathsf{BC})$, er $(\mathsf{AB})\mathsf{C} = \mathsf{A}(\mathsf{BC})$, per definition. $\square$