Aflevering i uge 39

Mere varmemester

Betragt først figuren i opgaveformuleringen. Lad nu T_1 og T_2 betegne temperaturen i det øverste værelse henholdsvis det nederst. Værelsernes temperatur beregnes som et vægtet gennemsnit af væggenes areal og temperaturen udenfor hver af de tre vægge. Man får, at

$$T_1 = \frac{3 \cdot 20 + 5 \cdot 10 + 4T_2}{3 + 4 + 5} = \frac{55 + 2T_2}{6}, \tag{1}$$

$$T_2 = \frac{6 \cdot 20 + 4T_1 + 6 \cdot 10}{6 + 4 + 6} = \frac{45 + T_1}{4}. \tag{2}$$

Nu forlænges (1) med 6, hvorefter (2) indsættes i den nye ligning:

$$6T_1 = 55 + 2T_2 \Leftrightarrow 6T_1 = 55 + \frac{45}{2} + \frac{T_1}{2} \Leftrightarrow T_1 = \frac{155}{11} \approx 14{,}09. \tag{3}$$

Dette indsættes så i (2), der dog først forlænges med 4:

$$4T_2 = 45 + T_1 \Leftrightarrow 4T_2 = 45 + \frac{155}{11} \Leftrightarrow T_2 = \frac{325}{22} \approx 14{,}77. \tag{4}$$

Konklusion: af (3) og (4) ses det, at $T_1 \approx 14^\circ$ og $T_2 \approx 15^\circ$.

Nu vil vi regne generelt og antage, at de fire ydervægge har temperaturerne a, b, c og d. Da temperaturen i hvert værelse stadig er et vægtet gennemsnit af væggenes areal og temperaturen udenfor hver af de tre vægge, har vi følgende ligninger:

$$T_1 = \frac{3a + 5b + 4T_2}{3 + 4 + 5} \Leftrightarrow 12T_1 - 4T_2 = 3a + 5b, \tag{5}$$

$$T_2 = \frac{6c + 4T_1 + 6d}{6 + 4 + 6} \Leftrightarrow -4T_1 + 16T_2 = 6c + 6d. \tag{6}$$

Nu kan ligningssystemet, der består af (5) og (6), skrives på matrixform, som

$$\left[\begin{array}{cc|c} 12 & -4 & 3a + 5b \\ -4 & 16 & 6c + 6d \end{array}\right] + \tfrac{1}{4}$$

Det gælder så om at få koefficientmatrixen skrevet på reduceret rækkeechelonform.

Først adderes $\frac{1}{4}$ gange den anden ligning til den første:

$$\left[\begin{array}{cc|r} 11 & 0 & 3a + 5b + \frac{3}{2}c + \frac{3}{2}d \\ -4 & 16 & 6c + 6d \end{array}\right] \quad + \tfrac{4}{11}$$

Dernæst adderes $\frac{4}{11}$ gange den første ligning til den anden:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 11 & 0 & 3a + 5b + \frac{3}{2}c + \frac{3}{2}d \\ 0 & 16 & \frac{12}{11}a + \frac{20}{11}b + \frac{72}{11}c + \frac{72}{11}d \end{array}\right] \quad + \tfrac{1}{11} \quad + \tfrac{1}{16}$$

Nu adderes først $\frac{1}{11}$ gange den anden ligning til den første, hvorefter $\frac{1}{16}$ gange den første ligning adderes til den anden:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{3}{11}a + \frac{5}{11}b + \frac{3}{22}c + \frac{3}{22}d \\ 0 & 1 & \frac{3}{44}a + \frac{5}{44}b + \frac{9}{22}c + \frac{9}{22}d \end{array}\right]$$

Ved at sætte $\frac{1}{44}$ udenfor, får man så, at

$$\frac{1}{44}\begin{bmatrix} 12 & 20 & 6 & 6 \\ 3 & 5 & 18 & 18 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}.$$

Af dette udtryk, følger det nu trivielt, at funktionen $(a, b, c, d) \mapsto (T_1, T_2)$ er lineær.