Aflevering i uge 6

Opgave 303

Proposition. *Lad* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *være funktionen, der er givet ved*

$$f(x) = x\big(\exp(x^{-1}) - 1\big) = \frac{\exp(x^{-1}) - 1}{x^{-1}}. \tag{1}$$

Der gælder så, at

$$f(x) \to 1 \quad \textit{for} \quad x \to \infty.$$

Bevis. Først defineres to funktioner $f_1, f_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ved

$$f_1(x) = \exp(x^{-1}) - 1,$$

$$f_2(x) = x^{-1}.$$

I og med at $D_{f_1} = D_{f_2} = \mathbb{R}_+$, er både f_1 og f_2 defineret og kontinuerte på hele $\mathbb{R}_+$, og af Sætning 6.35 (c) og (e) i [ETP][1] følger det derfor, at

$$\lim_{x\to\infty} f_2(x) = \lim_{x\to\infty} x^{-1} = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} f_1(x) = \lim_{x\to\infty} \big(\exp(x^{-1}) - 1\big) = \lim_{x\to\infty} \exp(x^{-1}) - \lim_{x\to\infty} 1 = \exp(0) - 1 = 0.$$

Altså kan Sætning 6.35 og 6.37 ikke bruges. Da både f_1 og f_2 er differentiable i det indre af deres definitionsmængde, vil jeg bruge l'Hôpitals regel om 0/0-udtryk, når x går mod uendelig (Sætning 7.22), så jeg differentierer nu tæller og nævner i f:

$$\frac{df_2}{dx}(x) = \frac{d}{dx}x^{-1} = -x^{-2},$$

$$\frac{df_1}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\big(\exp(x^{-1}) - 1\big) = \exp(x^{-1})\frac{d}{dx}x^{-1} = -x^{-2}\exp(x^{-1}).$$

Af Sætning 7.22 følger det, at idet grænseværdien

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{df_1}{dx}(x)}{\frac{df_2}{dx}(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^{-2}\exp(x^{-1})}{-x^{-2}} = \lim_{x\to\infty} \exp(x^{-1}) = \exp(0) = 1$$

eksisterer, så eksisterer $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ også, og

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{df_1}{dx}(x)}{\frac{df_2}{dx}(x)} = 1.$$

[1] Forkortelse for „Funktioner af en og flere variable“, 2. udgave, af E. T. Poulsen.

TEXperten.dk