Achilleus og skildpadden

Opgave C

Lad $x > 1$ betegne det antal gange, som Achilleus løber hurtigere end skildpadden og kald begyndelsesafstanden mellem dem d.

Achilleus' position

Achilleus' position er givet ved den rekursive ligning

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{x} + d, \tag{1}$$

med startbetingelsen $a_1 = 0$. Af (1) fås, at

$$a_2 = \frac{a_1}{x} + d = \frac{0}{x} + d = d,$$

$$a_3 = \frac{a_2}{x} + d = \frac{d}{x} + d = \frac{x+1}{x}d,$$

$$a_4 = \frac{a_3}{x} + d = \frac{\frac{x+1}{x}d}{x} + d = \frac{x+1}{x^2}d + d = \frac{x^2+x+1}{x^2}d,$$

$$a_5 = \frac{a_4}{x} + d = \frac{\frac{x^2+x+1}{x^2}d}{x} + d = \frac{x^2+x+1}{x^3}d + d = \frac{x^3+x^2+x+1}{x^3}d.$$

Det tyder altså på, at

$$a_n = \frac{\sum_{k=0}^{n-2} x^k}{x^{n-2}}d = \frac{\frac{x^{n-1}-1}{x-1}}{x^{n-2}}d = \frac{x^{n-1}-1}{x^{n-2}(x-1)}d = \frac{x-x^{2-n}}{x-1}d, \tag{2}$$

men der skal selvfølgelig et bevis til. Ved induktion, fås for $n = 1$, at

$$a_1 = \frac{x-x^{2-1}}{x-1}d = \frac{x-x}{x-1}d = 0,$$

hvilket netop var startbetingelsen. Nu antager jeg, at (2) er sand for $n = p$. Altså, at

$$a_p = \frac{x-x^{2-p}}{x-1}d. \tag{3}$$

Jeg mangler så at bevise (2) for tilfældet $n = p + 1$. Af (3) fås, at

$$a_{p+1} = \frac{a_p}{x} + d = \frac{\frac{x - x^{2-p}}{x-1}d}{x} + d = \frac{x - x^{2-p}}{x(x-1)}d + \frac{x^2 - x}{x(x-1)}d = \frac{x^2 - x^{2-p}}{x(x-1)}d = \frac{x - x^{2-(p+1)}}{x-1}d.$$

Heraf følger det, at (2) er sand for ethvert naturligt tal n.

Nu er jeg nemt i stand til at finde grænseværdien for talfølgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x - x^{2-n}}{x-1}d = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{x-1}d - \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2-n}}{x-1}d = \frac{x}{x-1}d - \frac{0}{x-1}d = \frac{x}{x-1}d. \quad (4)$$

Med $x = 3$ og $d = 100\,\mathrm{m}$, fås nu af (2) og (4), at

$$a_n = 150\big(1 - 3^{1-n}\big)\ \mathrm{m} \qquad \text{og} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 150\ \mathrm{m}.$$

Skildpaddens position

Af (2) finder jeg nemt med $t_n = a_{n+1}$, at

$$t_n = \frac{x - x^{2-(n+1)}}{x-1}d = \frac{x - x^{1-n}}{x-1}d. \quad (5)$$

Grænseværdien for talfølgen $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ er, helt analogt (4), lig med

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x - x^{1-n}}{x-1}d = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{x-1}d - \lim_{n\to\infty} \frac{x^{1-n}}{x-1}d = \frac{x}{x-1}d - \frac{0}{x-1}d = \frac{x}{x-1}d. \quad (6)$$

Af (4) og (6) ses det, at

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} t_n,$$

ganske som forventet. Da jeg stadig har $x = 3$ og $d = 100\,\mathrm{m}$, er

$$t_n = 150\big(1 - 3^{-n}\big)\ \mathrm{m} \qquad \text{og} \qquad \lim_{n\to\infty} t_n = 150\ \mathrm{m}.$$

Konklusion

Idet $a_1 = 0$, vil Achilleus ifølge (4) og (6) indhente skildpadden, når han har tilbagelagt strækningen $x/(x-1)d$. I den konkrete opgave, bliver dette $150\,\mathrm{m}$.

Bemærkning. Skulle det have været mere stringent, burde jeg have vist, at grænseværdierne i det ovenstående rent faktisk eksisterer, inden jeg beregner den.