TØ-opgaver til uge 46

Først laver vi en liste over de ligninger med mere i [ITP], der skal bruges:

[1]: Ligning (2.5) på side 4.
[2]: Sætning 3.1, ligning (3.3) på side 7.
[3]: Sætning 3.1, ligning (3.4) på side 7.
[4]: Sætning 3.1, ligning (3.5) på side 7.
[5]: Ligning (3.9) på side 8.
[6]: Definition 4.2 på side 14.
[7]: Sætning 4.7 på side 16.
[8]: Sætning 4.10 på side 18.
[9]: Sætning 5.6 iii) på side 23.

Opgave 5

Lad $A, B \in \mathcal{F}$ være hændelser og lad $C = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ (C kaldes den symmetriske mængdedifferens, thi elementer i C er med i enten A eller B). Da $(A \cup B) \supseteq (A \cap B)$, er

$$\begin{aligned} P(C) &= P((A \cup B) \setminus (A \cap B)) \\ &\overset{[2]}{=} P(A \cup B) - P(A \cap B) \\ &\overset{[4]}{=} (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B). \end{aligned}$$

Opgave 6

Et fly har to sikkerhedssystemer, der virker uafhængigt af hinanden. Lad de to hændelser A og B være givet ved

A: Det første sikkerhedssystem bryder sammen,
B: Det andet sikkerhedssystem bryder sammen.

Det oplyses, at $P(A) = P(B) = 0{,}01$. Vi vil så bestemme sandsynligheden for at følgende hændelsen indtræffer:

C: Højest én af de to sikkerhedssystemer bryder sammen.

Først observerer vi, at $C = (A \cap B)^C$, så da A og B er uafhængige, er

$$P(C) = P\big((A \cap B)^C\big) \overset{[3]}{=} 1 - P(A \cap B) \overset{[6]}{=} 1 - P(A)P(B) = 1 - 0{,}01^2 = \underline{\underline{0{,}9999}}.$$

Opgave 9

Tre kommoder indeholder hver to skuffer, hvorom vi ved, at i den første kommode er der én guldmønt i hver af skufferne, i den anden skuffe er der én guld- og én sølvmønt i hver skuffe og i den sidste kommode er der én sølvmønt i hver af de to skuffer. Nu åbnes en skuffe, og den viser sig at indeholde en guldmønt.

Da vi har tre skuffe, der kan indeholde en guldmønt, og der er to guldmønter tilbage, må sandsynligheden for at trække endnu en guldmønt i samme kommode som den første være 2/3.

Dette må vi hellere få vist stringent, så lad G_i og K_j betegne hændelserne

$$\begin{aligned} G_i &: \text{ Der udtrækkes en guldmønt i den } i\text{'te skuffe; } && i = 1, 2, \\ K_j &: \text{ Der åbnes en skuffe i den } j\text{'te kommode; } && j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Det er klart, at $P(K_j) = 1/3$. Da vi kan udtrække en guldmønt i den anden skuffe i hver af de tre kommoder, under forudsætning af at der var en guldmønt i den første skuffe, er

$$P(G_2) = P(K_1 \mid G_1) + P(K_2 \mid G_1) + P(K_3 \mid G_1) = P(K_1 \mid G_1). \tag{$*$}$$

Sidste lighedstegn følger af, at man ikke kan udtage en guldmønt fra anden skuffe i hverken anden eller tredje kommode (der var jo ikke mere end én enkelt guldmønt i nogen af dem fra starten). Videre ved vi, at

$$P(G_1 \mid K_1) = 1, \quad P(G_1 \mid K_2) = 1/2, \quad P(G_1 \mid K_3) = 0.$$

Vi antager nu, at K_j'erne er disjunkte hændelser, og vi ved at $E = \bigcup_{j=1}^{3} K_j$. Heraf ses, at

$$G_1 = G_1 \cap E = G_1 \cap \left(\bigcup_{j=1}^{3} K_j \right)$$

er en endelig forening af disjunkte mængder. Dette betyder, at

$$P(G_1) \overset{[7]}{=} \sum_{j=1}^{3} P(G_1 \mid K_j) P(K_j) = 1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

Nu bruger vi så Bayes' formel til at beregne den ønskede sandsynlighed:

$$P(G_2) \overset{(*)}{=} P(K_1 \mid G_1) \overset{[8]}{=} \frac{P(G_1 \mid K_1) P(K_1)}{\displaystyle\sum_{j=1}^{3} P(G_1 \mid K_j) P(K_j)} = \frac{P(K_1)}{P(G_1)} \cdot P(G_1 \mid K_1) = \frac{1/3}{1/2} \cdot 1 = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}.$$

Opgave 11

Lad $1 =$ blå, $2 =$ gul og $3 =$ hvid, lad $i = 1, 2, 3$ og lad B_i og G betegne hændelserne

$$\begin{aligned} B_i&: \text{ En udvalgt blomst har anlæg for den } i\text{'te farve,} \\ G&: \text{ En udvalgt blomst kommer i groning.} \end{aligned}$$

Det oplyses nu, at

$$\begin{array}{ccc} P(B_1) = 0{,}7, & P(B_2) = 0{,}2, & P(B_3) = 0{,}1, \\ P(G \mid B_1) = 0{,}95, & P(G \mid B_2) = 0{,}90, & P(G \mid B_3) = 0{,}90. \end{array}$$

Spørgsmål (i)

Vi skal have bestemt sandsynligheden for at en tilfældigt valgt plante kommer i groning. Antag derfor, at en blomst „kun“ kan have anlæg for én farve. Det vil sige, at B_i'erne er disjunkte hændelser og $E = \bigcup_{i=1}^{3} B_i$. Heraf ses, at

$$G = G \cap E = G \cap \left(\bigcup_{i=1}^{3} B_i \right)$$

er en endelig forening af disjunkte mængder. Dette betyder, at

$$P(G) \overset{[7]}{=} \sum_{i=1}^{3} P(G \mid B_i) P(B_i) = 0{,}95 \cdot 0{,}7 + 0{,}9 \cdot 0{,}2 + 0{,}9 \cdot 0{,}1 \approx \underline{\underline{0{,}94}}.$$

Spørgsmål (ii)

Af Bayes' formel fås nu direkte, at sandsynligheden for at en blomst, der kommer i groning, er gul, er lig med

$$P(B_2 \mid G) \overset{[8]}{=} \frac{P(G \mid B_2) P(B_2)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{3} P(G \mid B_i) P(B_i)} = \frac{P(B_2)}{P(G)} \cdot P(G \mid B_2) = \frac{0{,}9 \cdot 0{,}2}{0{,}935} \approx \underline{\underline{0{,}19}}.$$

Opgave 16

Lad $(E, \mathcal{F}, P)$ betegne et sandsynlighedsrum og lad $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{F}$ være (indbyrdes) uafhængige hændelser. Vi skal have vist, at $A_1 \cap A_2$ og A_3 er uafhængige:

$$P((A_1 \cap A_2) \cap A_3) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \overset{[6]}{=} P(A_1)P(A_2)P(A_3) \overset{[6]}{=} P(A_1 \cap A_2)P(A_3).$$

Af [6] følger det nu, at $A_1 \cap A_2$ og A_3 er uafhængige.

Opgave 24

Lad X være en stokastisk variabel, der opfylder følgende:

$$P(X \in [0,1]) = 1/2 \quad \text{og} \quad P(X \in [0,1/4]) = 1/3.$$

Vi ser, at $[1/4,1] = [0,1] \setminus [0,1/4]$, så da $[0,1] \supseteq [0,1/4]$, er

$$P(X \in [1/4,1]) \overset{[2]}{=} P(X \in [0,1]) - P(X \in [0,1/4]) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}.$$

Opgave 26

Lad X betegne en diskret stokastisk variabel med sandsynlighedsfunktion p_X, hvor

$$p_X(x) = \begin{cases} c|x| & \text{for } x \in \{-1,1,2\} \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

hvor $c \in \mathbb{R}_+$ er en konstant.

Spørgsmål (i)

Vi skal have bestemt værdien af c. Lad $\mathcal{K} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \operatorname{supp} p_X\}$, så er

$$1 \overset{[9]}{=} \sum_{x \in \mathcal{K}} p_X(x) = c|-1| + c|1| + c|2| = 4c \quad \Longrightarrow \quad c = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}.$$

Jeg gider ikke at tegne grafen for p_X.

Spørgsmål (ii)

Lad $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| = 1\}$. Vi ser, at $B \cap \operatorname{supp} p_X = \{-1,1\}$, så da $\{-1\} \cap \{1\} = \emptyset$, er

$$P(|X| = 1) \overset{[5]}{=} P(X = -1) + P(X = 1) = \frac{1}{4} \cdot |-1| + \frac{1}{4} \cdot |1| = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

Opgave 27

En „ærlig“ mønt (ved „ærlig“ forstås her, at $P(\text{plat}) = P(\text{krone}) = 1/2$) kastes vilkårligt mange gange. De enkelte kast er indbyrdes uafhængige. Lad B betegne hændelsen „plat“ og lad B^C betegne hændelsen „krone“. Sæt så

$$V_{KK} = \min\{n \in \mathbb{N} \mid \text{det } (n-1)\text{'te kast giver krone og det } n\text{'te kast giver krone}\},$$

$$V_{KP} = \min\{n \in \mathbb{N} \mid \text{det } (n-1)\text{'te kast giver krone og det } n\text{'te kast giver plat}\}.$$

Vi har så følgende mulige udfald:

$$E_2 = \{BB, BB^C, B^C B, B^C B^C\},$$
$$E_3 = \{BBB, BBB^C, BB^C B, B^C BB, BB^C B^C, B^C BB^C, B^C B^C B, B^C B^C B^C\}.$$

Dette viser, at $\#E_2 = 4$ og $\#E_3 = 8$. Nu observerer man så, at

$$\{V_{KK} = 2\} = \{B^C B^C\}, \qquad \{V_{KP} = 2\} = \{B^C B\},$$
$$\{V_{KK} = 3\} = \{BB^C B^C\}, \quad \{V_{KP} = 3\} = \{BB^C B, B^C B^C B\}.$$

Da $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ er et uniformt sandsynlighedsmål på $\mathcal{F}$, er

$$P(V_{KK} = 2) \overset{[1]}{=} \frac{\#\{V_{KK} = 2\}}{\#E_2} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}},$$
$$P(V_{KP} = 2) \overset{[1]}{=} \frac{\#\{V_{KP} = 2\}}{\#E_2} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}},$$
$$P(V_{KK} = 3) \overset{[1]}{=} \frac{\#\{V_{KK} = 3\}}{\#E_3} = \underline{\underline{\frac{1}{8}}},$$
$$P(V_{KP} = 3) \overset{[1]}{=} \frac{\#\{V_{KP} = 3\}}{\#E_3} = \frac{2}{8} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}.$$

Litteratur

[ITP] Preben Blæsild og Jan Pedersen. *An Introduction to Probability Theory*, 3. udgave. Aarhus Universitet, Danmark 2004.