Aflevering i uge 39

Vi skal i denne opgave se på Lotka-Volterremodellen, der er givet ved systemet

$$\begin{aligned} x_1' &= (a - bx_2)x_1, \\ x_2' &= (cx_1 - d)x_2, \end{aligned} \tag{$*$}$$

på den åbne 1. kvadrant, $\mathcal{K}$, hvor $a, b, c, d \geq 0$. Altså er

$$(x_1, x_2) \in \mathcal{K} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1, x_2 > 0\}.$$

Del (a)

Systemet $(*)$ er integrabelt i den forstand, at der eksisterer en C^1-funktion, $F : U \to \mathbb{R}$, hvor $U \subseteq \mathcal{K}$ er åben og tæt i $\mathcal{K}$, således at $\nabla F(x_1, x_2) \neq 0$ for alle $x = (x_1, x_2) \in U$ og så F samtidig er konstant på enhver af systemets baner.

Bevis. Ved separation af de variable, kan $(*)$ løses på følgende måde:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{(ct - d)y}{(a - by)t} && \Longrightarrow \\ \frac{a - by}{y}\,dy &= \frac{ct - d}{t}\,dt && \Longrightarrow \\ \int \big(ay^{-1} - b\big)dy &= \int \big(c - dt^{-1}\big)dt && \Longrightarrow \\ a\log(y) - by &= ct - d\log(t) + C_0, \end{aligned} \tag{1}$$

hvor $C_0 \in \mathbb{R}$ er en integrationskonstant. Af Definition 4.1 og til dels Eksempel 4.6 i [Bet] samt (1), ses det nu, at en bevægelseskonstant for $(*)$ er givet ved $F : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$, hvor

$$F(t, y) = a\log(y) - by + d\log(t) - ct.$$

Et fornuftigt „gæt“ på en C^1-funktion, der opfylder det ønskede, er så $F : U \to \mathbb{R}$, hvor vi sætter $U = \mathcal{K} \setminus \{(d/c, a/b)\}$, med

$$F(x_1, x_2) = d\log(x_1) - cx_1 + a\log(x_2) - bx_2. \tag{2}$$

Vi bemærker først, at hver af de partielt afledede af $F(x_1, x_2)$ eksisterer og er kontinuerte på U, og af (2) fås følgende:

$$(\nabla F)(x_1, x_2) \equiv \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1, x_2), \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1, x_2)\right) = \left(d \cdot \frac{1}{x_1} - c, a \cdot \frac{1}{x_2} - b\right). \tag{3}$$

Vi har nu følgende:

$$(\nabla F)(x_1, x_2) = 0 \implies \left(d \cdot \frac{1}{x_1} - c, a \cdot \frac{1}{x_2} - b\right) = (0,0) \implies (x_1, x_2) = \left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right).$$

Altså er $\nabla F \neq 0$ for enhver vektor $x = (x_1, x_2) \in U$.

Videre er det ganske nemt at indse, at

$$\forall\, v \in \mathcal{K} \;\; \forall\, \varepsilon > 0 \; \exists\, u \in U : |u - v| < \varepsilon,$$

så U er tæt i $\mathcal{K}$.[1] Ligeså oplagt er det, at U er en åben mængde, jævnfør definitionen på en sådanne, som blev givet i kurset Matematisk analyse 1 (Ma1).

Tilbage er der nu at vise, at F er konstant på alle systemets baner. Lad derfor funktionen $(x_1, x_2) : I \to \mathcal{K}$ være en løsning til $(*)$. Vi skal nu vise, at

$$F(x_1(t), x_2(t)) = c, \tag{4}$$

hvor $t \in I$ og $c \in \mathbb{R}$ er en konstant. Ved differentiation af (4), fås at

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{dt}(x_1(t), x_2(t)) &= (\nabla F)(x_1', x_2') \\
&= \frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1, x_2)x_1' + \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1, x_2)x_2' \\
&\overset{(\dagger)}{=} \left(\frac{d}{x_1} - c\right)(a - bx_2)x_1 + \left(\frac{a}{x_2} - b\right)(cx_1 - d)x_2 \\
&= ad - bdx_2 - acx_1 + bcx_1x_2 + acx_1 - ad - bcx_1x_2 + bdx_2 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

hvor vi i $(\dagger)$ har benyttet os af $(*)$ og (3). Da den tidsafledede af F er 0, er F konstant langs enhver maksimal bane, hvilket fuldfører beviset for Del (a). □

Lemma. *Lad $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ være givet ved*

$$\begin{aligned}
f(x_1) &= d\log(x_1) - cx_1, \\
g(x_2) &= a\log(x_2) - bx_2,
\end{aligned} \tag{5}$$

så gælder der, at

$$\begin{aligned}
f(x_1) &\to -\infty \;\text{ for }\; x_1 \to 0^+, \\
g(x_2) &\to -\infty \;\text{ for }\; x_2 \to 0^+, \\
f(x_1) &\to -\infty \;\text{ for }\; x_1 \to \infty, \\
g(x_2) &\to -\infty \;\text{ for }\; x_2 \to \infty.
\end{aligned}$$

[1] Dette følger også nemt af, at forskellen mellem de to mængder kun er ét enkelt punkt.

Bevis. I det følgende bevis, bruges sætninger fra Ma1 om grænseværdi, så disse undlader vi at henvise til. Nuvel, lad f og g være givet som i (5). Da $a, b, c, d \geq 0$, „opfører“ de to funktioner sig ens. Vi ved, at $\log(x) \to -\infty$ for $x \to 0^+$, så da $x_i \to 0$ for $x_i \to 0^+$, hvor $i \in \{1, 2\}$, har vi klart, at

$$f(x_1) \to -\infty \;\text{ for }\; x_1 \to 0^+ \qquad \text{og} \qquad g(x_2) \to -\infty \;\text{ for }\; x_2 \to 0^+.$$

For de to andre grænseværdier, laver vi et lille „trick“, idet vi omskrive f og g:

$$f(x_1) = d\log(x_1) - cx_1 = x_1\left(d \cdot \frac{\log(x_1)}{x_1} - c\right),$$

$$g(x_2) = a\log(x_2) - bx_2 = x_2\left(a \cdot \frac{\log(x_2)}{x_2} - b\right).$$

Da $\log(x)/x \to 0$ for $x \to \infty$, kan vi relativt nemt – igen ved brug af „passende“ sætninger fra Ma1 – vise, at

$$f(x_1) \to -\infty \;\text{ for }\; x_1 \to \infty \qquad \text{og} \qquad g(x_2) \to -\infty \;\text{ for }\; x_2 \to \infty.$$

Hermed er lemmaet bevist. □

Bemærkning. Beviset for lemmaet er langt fra stringent, men eftersom det udelukkende bygger på stof fra et tidligere kursus, springer vi relativt let henover det.

Del (b)

Enhver maksimal bane for $(*)$ er indeholdt i en kompakt delmængde af $\mathcal{K}$.

Bevis. Eftersom F er konstant på alle bane, er det tilstrækkeligt at vise, at for enhver konstant, k, er mængden

$$F^{-1}(k) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x_1, x_2) = k\} \tag{6}$$

indeholdt i en kompakt delmængde af $\mathcal{K}$, da enhver bane er indeholdt i en sådan mængde (jævnfør Proposition 4.3 i [Bet]).

Lad f og g være givet som i (5). Af lemmaet følger det direkte, at de to funktioner er opadtil begrænsede på $(0, \infty)$. Dette er ganske nyttigt, thi vi ved da, at der specielt findes et M, således at

$$f(x_1) \leq M \qquad \text{og} \qquad g(x_2) \leq M, \tag{7}$$

for alle $x_1, x_2 \in (0, \infty)$. Da M er en konstant, har vi fra vores lemma og (7), at

$$F(x_1, x_2) = f(x_1) + g(x_2) \leq f(x_1) + M \to -\infty \;\text{ for }\; x_1 \to 0^+, \tag{8a}$$

$$F(x_1, x_2) = f(x_1) + g(x_2) \leq f(x_1) + M \to -\infty \;\text{ for }\; x_1 \to \infty, \tag{8b}$$

$$F(x_1, x_2) = f(x_1) + g(x_2) \leq g(x_2) + M \to -\infty \;\text{ for }\; x_2 \to 0^+, \tag{8c}$$

$$F(x_1, x_2) = f(x_1) + g(x_2) \leq g(x_2) + M \to -\infty \;\text{ for }\; x_2 \to \infty. \tag{8d}$$

Idet f er opadtil begrænset, har vi nu af (8a) og (8b), at

$$\exists\, e_1 > 0 \,:\, x_1 < e_1 \;\Rightarrow\; F(x_1, x_2) < k,$$

$$\exists\, N_1 > 0 \,:\, x_1 > N_1 \;\Rightarrow\; F(x_1, x_2) < k.$$

Vi ved også, at g er opadtil begrænset, så helt analogt fås af (8c) og (8d), at

$$\exists\, e_2 > 0 \,:\, x_2 < e_2 \;\Rightarrow\; F(x_1, x_2) < k,$$

$$\exists\, N_2 > 0 \,:\, x_2 > N_2 \;\Rightarrow\; F(x_1, x_2) < k.$$

Heraf kan vi slutte, at (6) er indeholdt i mængden

$$[e_1, N_1] \times [e_2, N_2],$$

der er en kompakt delmængde af $\mathcal{K}$. □

Del (c)

Feltet, $X : \mathcal{K} \to \mathbb{R}^2$, for $(*)$ er fuldstændigt.

Bevis. Ifølge Definition 3.5 i [Bet], følger Del (c) umiddelbart ved kombination af Del (b) og den sidste sætning i Sætning 3.8 i [Bet]. □

Litteratur

[Bet] David Betounes. *Differential Equations: Theory and Applications with Maple*®, 1. udgave. Springer-Verlag New York, New York, USA 2002.