Aflevering i uge 46

Opgave 56

Lad $\omega = x + iy = \cos\left(\frac{2}{5}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{5}\pi\right) \in \mathbb{C}$ være givet.

Spørgsmål (a)

Jeg vil først vise, at ω og ω^2 er femte enhedsrødder, altså at $\omega^5 = 1$ og $(\omega^2)^5 = 1$.

Af Sætning 2.14 i [ETP][1], fås først

$$|\omega| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\cos^2\left(\tfrac{2}{5}\pi\right) + \sin^2\left(\tfrac{2}{5}\pi\right)} = \sqrt{1} = 1,$$

Da $\arg(\omega) = \frac{2}{5}\pi$, følger direkte af udtrykket for ω og Korollar 2.21 i [ETP], at

$$\omega^5 = |\omega|^5\Big(\cos\left(5 \cdot \tfrac{2}{5}\pi\right) + i\sin\left(5 \cdot \tfrac{2}{5}\pi\right)\Big) = 1^5\big(\cos(2\pi) + i\sin(2\pi)\big) = 1(1 + 0i) = 1,$$

$$(\omega^2)^5 = |\omega|^{10}\Big(\cos\left(10 \cdot \tfrac{2}{5}\pi\right) + i\sin\left(10 \cdot \tfrac{2}{5}\pi\right)\Big) = 1^{10}\big(\cos(4\pi) + i\sin(4\pi)\big) = 1(1 + 0i) = 1.$$

Hermed er det ønskede bevist. □

Spørgsmål (b)

Jeg vil her vise, at $\omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1 = 0$.

Af Korollar 1.15 i [ETP], fås ved at forlænge med $\omega - 1$ og sætte $n = 4$, at

$$(\omega - 1)\left(\omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1\right) = \omega^5 - 1,$$

som ifølge Spørgsmål (a) er lig nul. Første faktor i ligningen er nul, hvis $\omega = 1 \neq \cos\left(\frac{2}{5}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{5}\pi\right) = (-1)^{\frac{2}{5}}$, så anden faktor må altså være nul. □

Spørgsmål (c)

Jeg vil nu bevise, at $\omega^8 + \omega^6 + \omega^4 + \omega^2 + 1 = 0$.

Af Sætning 2.23 i [ETP], har jeg nu

$$\omega^8 + \omega^6 + \omega^4 + \omega^2 + 1 = \omega^{8-5} + \omega^{6-5} + \omega^4 + \omega^2 + 1 = \omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1.$$

Det følger nu direkte af Spørgsmål (b). □

[1] Forkortelse for „Funktioner af en og flere variable“, af E. T. Poulsen.

Spørgsmål (d)

Her viser jeg, at $\omega+\omega^{-1}$ og $\omega^2+\omega^{-2}$ er rødder i polynomiet t^2+t-1.

Ifølge Sætning 2.23 i [ETP] og Spørgsmål (b), fås nu med $t=\omega+\omega^{-1}$ henholdsvis $t=\omega^2+\omega^{-2}$, at

$$\begin{aligned} t^2+t-1 &= \big(\omega+\omega^{-1}\big)^2+\big(\omega+\omega^{-1}\big)-1 = \omega^2+2\omega\omega^{-1}+\omega^{-2}+\omega+\omega^{-1}-1 \\ &= \omega^2+2+\omega^{-2+5}+\omega+\omega^{-1+5}-1 = \omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega+1=0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t^2+t-1 &= \big(\omega^2+\omega^{-2}\big)^2+\big(\omega^2+\omega^{-2}\big)-1 = \omega^4+2\omega^2\omega^{-2}+\omega^{-4}+\omega^2+\omega^{-2}-1 \\ &= \omega^4+2+\omega^{-4+5}+\omega^2+\omega^{-2+5}-1 = \omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega+1=0. \end{aligned}$$

Dette var netop, hvad jeg ønskede at vise. $\square$

Spørgsmål ($\mathbf{e}_1$)

Nu viser jeg, at $\omega+\omega^{-1}=2\cos\big(\frac{2}{5}\pi\big)$.

Ifølge Sætning 2.14 i [ETP], fås ved kvadrering, at

$$\omega\overline{\omega}=|\omega|^2=1.$$

Da $\omega\overline{\omega}=1\Leftrightarrow\omega^{-1}=\overline{\omega}$, har jeg af Sætning 2.11 i [ETP], at

$$\omega+\omega^{-1}=\omega+\overline{\omega}=2\Re(\omega)=2\cos\big(\tfrac{2}{5}\pi\big),$$

hvilket jo var det, der skulle vises. $\square$

Spørgsmål ($\mathbf{e}_2$)

Til sidst vil jeg bevise, at $\cos\big(\frac{2}{5}\pi\big)=\frac{1}{4}\big(\sqrt{5}-1\big)$.

Om polynomiet i Spørgsmål (d) gælder der, at

$$t^2+t-1=0\Leftrightarrow t=\tfrac{1}{2}\big(\sqrt{5}-1\big)\vee t=\tfrac{1}{2}\big(-\sqrt{5}-1\big).$$

Da $\omega+\omega^{-1}$ er rod i polynomiet, har jeg ifølge Spørgsmål (e_1), at

$$\cos\big(\tfrac{2}{5}\pi\big)=\tfrac{1}{4}\big(\sqrt{5}-1\big)>0\vee\cos\big(\tfrac{2}{5}\pi\big)=\tfrac{1}{4}\big(-\sqrt{5}-1\big)<0,$$

men eftersom $0<\frac{2}{5}\pi<\frac{1}{2}\pi$, er $\cos\big(\frac{2}{5}\pi\big)>0$. Altså er

$$\cos\big(\tfrac{2}{5}\pi\big)=\tfrac{1}{4}\big(\sqrt{5}-1\big).$$

Hermed er det sidste bevist. $\square$

Bemærkning

Det kan lige nævnes, at

$$16\cos\big(\tfrac{2}{17}\pi\big)=-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{170+38\sqrt{17}}}.$$